

# Teória podobnosti a modelovanie v mechanike hornín a masívu

Juraj B. Ďurove<sup>1</sup>

## Theory of Similarity and Modelling in Rock Mechanics

The work describes a laboratory method of investigating the stress-strain state around horizontal mine openings (galleries) using of physical modelling. Basic results carried out of the experiments make possible to determine the value of the support's resistance  $q$ , which is required for the stabilization of the mine opening in the real conditions.

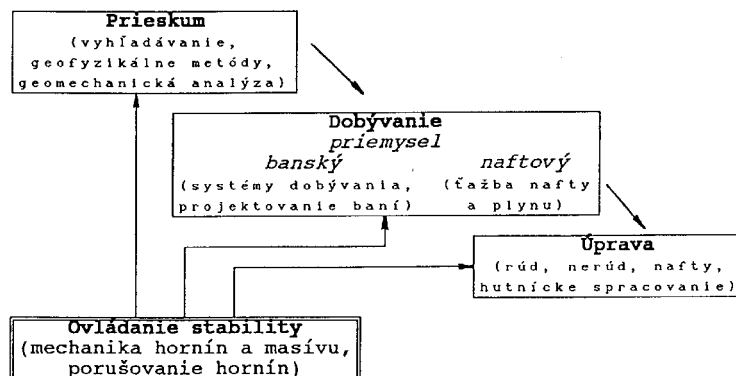
**Key words:** theory of similarity, geomechanical models.

## Úvod

Racionálne využívanie neobnoviteľných prírodných zdrojov musí vychádzať z optimalizácie ekonomických požiadaviek na surovinné zdroje a ekologických požiadaviek prírodného prostredia v súlade s dlhodobými cieľmi národného hospodárstva. Pri jeho reštrukturalizácii treba sledovať znižovanie energetickej náročnosti a efektívnejšie využívať vlastnú surovinnú základňu. Cieľom musí byť priblíženie sa k bezodpadovému spracovaniu surovín a pokiaľ nebude možné doprovodné suroviny využiť, treba ich uskladniť a registrovať pre využitie v budúcnosti (Burian in Bartalský, 1990).

Uvedené hľadiská rozvoja surovinovej a energetickej bázy SR sa premietajú i do rozvoja vednej disciplíny *Mechanika hornín a masívu*, ktorá sa zaoberá vlastnosťami hornín, napätovo-deformačnými stavmi v horninovom masíve a stabilitou podzemných priestorov. Takúto priamu súvislosť možno vidieť konkrétne v tom, že ak banské diela nie sú stabilné, potom nemôže byť bezpečný prístup k ložisku a následné dobývanie úžitkového nerastu sa stáva nemožným (Ďurove, 1994; Bukovanský, 1999 a i.). Obdobne i pre všetky ostatné podzemné diela je aspekt zabezpečenia ich stability relevantným.

O význame stabilitej problematiky v jej širších súvislostiach nás dobre informuje náčrtok podľa Prof. Bieniawského, z ktorého je vidieť osobitné postavenie stability hornín ako dôležitej banskej disciplíny (obr.1).



Obr.1. Postavenie stabilitej problematiky (podľa Bieniawského).

## Prehľad základných výskumných postupov v mechanike hornín a masívu z hľadiska riešenia stabilných úloh

Výskumné metódy riešenia napätovo-deformačného stavu horninového masívu, z hľadiska ich podstaty i historického vývoja, môžeme rozdeliť do dvoch veľkých skupín:

1. modelovacie výskumné metódy,
2. výskum v banských podmienkach.

### Modelovacie výskumné metódy

Modely sú inžinierske predstavy o skúmanom objekte, ktoré môžu byť sformulované, buď matematicky (matematické modely), alebo materializované vo forme fyzikálnych modelov.

Denkhaus (1970) rozlišuje principiálne dva typy fyzikálnych modelov: ekvivalentné a analógové.

<sup>1</sup> Ing. Juraj B. Ďurove, CSc., Katedra dobývania ložísk a geotechniky F BERG Technickej univerzity, 043 84 Košice, Park Komenského 19 (Recenzovali: Doc. Ing. Václav Sedlatý, CSc. a Ing. Michal Maras, CSc.)

U ekvivalentných modelov sú podmienky charakterizujúce reálnu úlohu reprodukované v určitej (spravidla menšej) mierke. Konkrétne pre objekt, ktorý máme skúmať, zhotovujeme fyzikálny model podľa zákonov podobnosti. Ekvivalentné modely sú zvlášť užitočné v prípade, ak matematické riešenie konkrétnej úlohy je obťažné, alebo ak vzťahy medzi charakteristikami vystupujúcimi v tejto úlohe nie sú známe. Kritika ekvivalentných modelov vychádza z faktu, že nie je možné postaviť ekvivalentný model vo všetkých mechanických parametroch ako to potrebuje teória, a nie je možné sledovať napríklad vplyv zmien geomechanických parametrov, čo je pri riešení úloh mechaniky hornín a masívu zvlášť dôležité. Tieto argumenty nie sú oprávnené vtedy, ak iné metódy nám nezaručujú získanie lepších výsledkov, ako hoci len „približné“ ekvivalentné modelovanie.

Analógové modely sa využívajú na modelovanie javov. Pre nich je určujúce to, aby sa správanie modelu pridržiavalo tých istých závislostí, aké sa prejavujú v skutočnosti (u ekvivalentných modelov sa táto podmienka ako pravidlo nevyžaduje).

Iné delenie fyzikálnych modelov je známe z hľadiska ich cieľa, a to:

- *demonštračné* (sú určené na priestorové demonštrovanie projektovaného diela),
- *pokusné-zisťovacie* (sú určené na získanie konkrétnych riešení; model diela sa skúma za podmienok podobných podmienkam skutočného diela; výsledkom je určitá informácia o kvalitatívnych a kvantitatívnych charakteristikách skúmaného objektu),
- *heuristické* (sú určené na získanie nových predstáv a ideí o zložitých javoch na základe pozorovaní na modeli; sú zvlášť užitočné vo vedeckom, ale i praktickom zmysle).

Uvedené delenie fyzikálnych modelov je všeobecne prijaté, avšak presná hranica medzi nimi nie je, a často v modeloch pre riešenie konkrétnych úloh sa nachádzajú črty i heuristických modelov. Práve oni vyvolávajú nové asociácie, prebúdajú duch novátorstva a intuíciu. Týmto faktormi je zvýraznený význam fyzikálneho modelovania aj v disciplínach mechanika hornín a masívu i projektovanie podzemných diel.

Matematické modelovanie spočíva v popise javov matematickými vzťahmi a ich skúmaní matematickými cestami. V súčasnosti poznáme množstvo numerických metód, z ktorých sa v mechanike najčastejšie používa metóda konečných prvkov. V nej ide o získanie riešenia úlohy v tvare aproximácie pre vybrané uzly a potom, využijúc interpolačnú funkciu, môžeme získané riešenie rozšíriť aj na ostatnú oblasť.

Výhodou matematického modelovania je, že pri vytváraní modelu možno vychádzať zo základných zákonov fyziky a mechaniky a modelový jav môžeme opakovať s rovnakými, alebo meniacimi sa východzími podmienkami.

Najviac diskutovanou otázkou matematického modelovania je fakt, do akej miery model vystihuje charakteristiky a správanie sa reálneho masívu. V predkladanej práci sa však z dôvodu jej zamerania týmto diskutovaným problémom matematického modelovania hlbšie nevenujem. V plnej miere však u takýchto modelov platí, že matematické systémy prísne vyjadrujú vzťahy medzi nezávisle a závisle premennými.

Použitie niektorého z uvedených modelov ako základnej výskumnej metódy (metóda fyzikálneho modelovania, respektíve matematického modelovania), závisí od možnosti uskutočnenia experimentov v laboratóriu, prípadne od dostupnosti a dostatočného množstva informácií o skúmanom objekte. Obe tieto modelovacie výskumné metódy sa široko využívajú v mechanike hornín a masívu. Aj keď v poslednom období je tendencia širšieho využívania matematických modelov (Hatala, 1978; Maras 1995 a i.), je zrejme, že fyzikálne modely naďalej zohrávajú významnú úlohu vo vedeckej i praktickej činnosti (Machálek, 1980; Kitagawa et al., 1991).

### Výskum v bankých podmienkach

Výskum v bankých podmienkach dopĺňa, respektíve overuje závery fyzikálneho modelovania alebo matematických riešení priamo in situ. Týmto výskumom sa tiež získavajú objektívne vstupné informácie pre modelovacie metódy (Sasvári, 1996).

Charakter uvedeného výskumu je obvykle časovo a ekonomicky veľmi náročný a získané výsledky sú závislé od viacerých podmienok: dostatočný súbor výsledkov, reprezentatívne miesta merania, meracie zariadenia vyhovujúce bankému prostrediu a tak ďalej. Napriek tomu je však potrebné konštatovať, že mnohé geomechanické problémy možno skúmať a riešiť len v podmienkach *in situ*.

### Riešenie úloh stability bankých diel za použitia fyzikálnych modelov

Zvládnutie tlakového režimu bankých diel, ako podmienky pre bezpečnosť a efektívnosť ťažby, si vyžaduje od praxe a výskumu prehodnocovať doterajšie a voliť nové komplexnejšie prístupy, ktoré postihujú najzávažnejšie zmeny v horninovom masíve. Obecnejšie tieto súvislosti charakterizuje napríklad Kožešník (1983): *“Rasúta kvantita relevantných veličín prerastá do novej kvality, ktorá si vyžaduje nový teoretický i experimentálny prístup, nové, ďaleko zložitejšie modely, nové algoritmy.”*

### Ku klasifikáciám fyzikálneho modelovania

Typické aplikácie fyzikálneho modelovania podzemných diel s cieľom skúmania napätí v ich okolí podľa jednotlivých autorov a základných charakteristík použitých modelov sú uvedené v tabuľke 1.

Tabuľka 1. Základné údaje o používaných fyzikálnych modeloch.

Autor	Mierka	Rozmery modelu [m]	Max. zaťaženie [t]
Barron	70:1	1,8 x 1,8 x 0,3	150,00
Jacobi	10:1	9,1 x 1,8 x 3,9	1,68
Hobbs	50:1	0,6 x 0,6 x 0,1	9,42
Wang	3000:1	0,1 x 0,03 x 0,025	0,003
Hoek	1000:1	0,3 x 0,3 x 0,3	0,001
Heuer	33:1	0,6 x 0,6 x 0,2	96,00

Detailné údaje o konštrukcii a skúšaní na jednotlivých fyzikálnych modeloch uvádza Fumagalli (1973). Pre získanie základného obrazu o modelovacích technikách použitých pre horninu a masív treba aspoň v stručnosti uviesť, že:

**Barron a Larocque** vyvinuli modelovaciu techniku pre štúdium napätí v okolí bankských diel istej rudnej bane za použitia mixovanej sadry a živice pre napodobenie typických geologických častí;

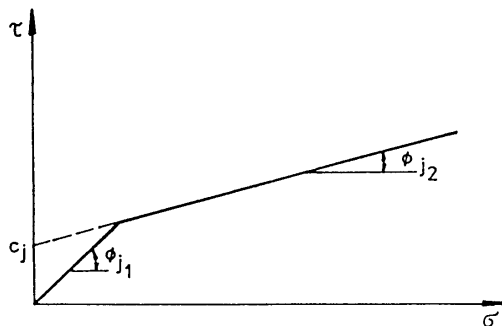
**Jacobi a Everling** študovali správania sa rôznych druhov výstuží dlhých bankských diel pomocou veľkometerových fyzikálnych modelov. Ako ekvivalentný materiál použili portlandský cement, ílovitý a kremenný prášok;

**Hobbs** študoval účinky pevnosti hornín vo vzťahu na tvar, veľkosť otvoru, typ vystužovacieho systému porubovej a hlavnej chodby pri stenovaní. Ekvivalentný materiál bol pripravený z piesku, sadry a vody;

**Wang a Hoek** použili centrifúgu na získanie potrebnej hustoty modelovacieho materiálu. Wang skúmal medzné zaťaženie na konštrukciu tvaru nosníka. Hoek skúmal vplyv otepľovania a ochladzovania na napätový stav;

**Heuer** skúmal zmeny napätí v porušených horninách, u ktorých dochádza k zmene uhla vnútorného trenia  $\Phi_j$  a pre ktoré môžu byť získané dostatočne uspokojivé výsledky aproximáciou po úsekoch, to je lineárnou aproximáciou (obr. 2).

Bez ohľadu na pozorované odlišnosti v prístupoch jednotlivých autorov je faktom, že teoretický základ pre voľbu, výpočet a stavbu fyzikálnych modelov, ako aj pre spracovanie a zobecnenie výsledkov pokusov tvorí teória podobnosti.

Obr.2 Zmeny priebehu napätí (podľa Heuera).  $\Phi_j$  – uhol vnútorného trenia hornín.

### Princípy teórie podobnosti

Vedeckým základom fyzikálnych technických výskumov je teoretická fyzika, ktorej neoddeliteľnou časťou je teória podobnosti. Základný metodický návod k použitiu teórie podobnosti či pre fyzikálne modelovanie, alebo pre technické experimentovanie spočíva v nasledovnom:

a) k pre skúmaný dej sú známe vzťahové rovnice, alebo ich môžeme zostrojiť, potom teóriu podobnosti možno použiť pre skúmanie určítosti pripojených podmienok jednoznačnosti - hovoríme o *metóde analýzy vzťahových rovníc*;

b) ak nepoznáme matematickú závislosť medzi veličinami charakterizujúcimi skúmaný dej, potom je možné použiť *metódu analýzy rozmerov (dimenzionálnu analýzu)*, pri ktorej je nutné získané výsledky overiť pokusne fyzikálnym modelovaním, respektíve technickým experimentovaním.

U väčšiny fyzikálnych javov spadajúcich do sféry mechaniky hornín a masívu buď nepoznáme vzťahové rovnice, alebo sú známe pre značne idealizované prostredie.

Rozmerová analýza sa opiera o princíp rozmerovej homogenity fyzikálnych rovníc a jeho dôsledky. V obecnom prípade ide o úplnú fyzikálnu rovnicu, ktorá vyjadruje závislosť n relevantných veličín  $v_1, v_2, \dots, v_n$  rôznych rozmerov, to je :

$$f(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0 \quad (1)$$

Podľa Buckinghamovej  $\pi$  - teorémy môžeme rovnicu (1) napísať v tvare:

$$f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k) = 0 \quad (2)$$

respektíve :

$$\pi_1 = \psi(\pi_2, \dots, \pi_k) \quad (3)$$

Čiže z požiadavky rozmerovej rovnorodosti vyplýva, že veličiny  $v_1, v_2, \dots, v_n$  vystupujú v rovnici (1) v skupinách:

$$\pi_1 = v_1^x l_1 \cdot v_2^x l_2 \cdot \dots \cdot v_n^x l_n \quad (4)$$

kde  $i = 1, 2, \dots, k$  a  $\pi_i$  je bezrozmerná premenná, takže  $[\pi_i] = 1$  (prosté číslo). Dôkaz uvádza Kožešník (1983).

Nájdienie všetkých nezávislých bezrozmerných  $\pi$  - argumentov, ktoré možno vytvoriť z  $n$  relevantných rozmerových veličín  $v_1, v_2, \dots, v_n$  môžeme urobiť za predpokladu, že je daná sústava mier, ktorá je založená na  $m$  rozmerovo nezávislých jednotkách  $z_1, z_2, \dots, z_m$  ( $m < n$ ) a že poznáme príslušné definičné rovnice.

Exponenty  $x_i$  možno získať riešením rovnice:

$$A \cdot x_i = 0 \quad (5)$$

Pričom  $A$  je obdĺžniková dimenzionálna matica ( $n \times m$ ), ktorej hodnosť je  $h \leq m$  a  $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni}$  sú neznáme exponenty.

Túto metódu použijeme vtedy, ako už bolo zdôraznené, ak sa stretávame s javmi doteraz nepreskúmanými, to je nepoznáme vzťahové rovnice, ale kedy môžeme stanoviť fyzikálne veličiny, ktoré sa nutne uplatnia v príslušných rovniciach.

### Konkrétny príklad

Z hore uvedeného vyplýva, že napríklad pre overenie vplyvu zmien fyzikálnych vlastností hornín na priebeh deformácie bude vhodné použiť metódu dimenzionálnej analýzy.

V prípade modelovaného skúmania účinkov horninového prostredia na zaťaženie výstuže možno využiť analýzu partikulárnych vzťahových rovníc pre výber relevantných veličín a dimenzionálnu analýzu pre racionálnu stavbu modelu (experimentu) a zhodnotenie výsledkov. V ďalšom tento prístup podrobnejšie popíšem iba pre pružné riešenie.

Relevantné veličiny vystupujúce pri skúmaní napäťovo-deformačného stavu v bodoch na obvodě banského diela získame zo známych rovníc. Rozmerová matica pre základné jednotky  $L, T, M$  bude:

			relevantné veličiny				
			$a$	$U_a$	$\sigma$	$q$	
základné	jednotky	L	$1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$				(6)
		T					
		M					

respektíve v technickej sústave (L,F), ktorá postačuje k vyjadreniu všetkých veličín v statických úlohách:

		$\sigma$	$a$	$q$	$U_a$	
L	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	-2	1	-2	1	(7)
F		1	0	1	0	

Matica (7) má hodnosť  $h = 2$ , počet bezrozmerných kritérií podobnosti je  $(n - h) = 4 - 2 = 2$ . Príslušné dva bezrozmerné argumenty sú:

$$\pi_1 = \frac{q}{\sigma}; \quad \pi = \frac{U_a}{a} \quad (8)$$

Relevantné veličiny:  $\sigma$  - geostatický tlak [Pa],  
 $a$  - polomer banského diela [m],  
 $q$  - reakcia výstuže [Pa],  
 $U_a$  - posunutie bodu na obvodě diela [m].

Bezrozmerný popis uvažovaného javu na modeli bude:

$$\frac{q}{\sigma} = \psi_1 \left[ \frac{U_a}{a} \right] \quad (9)$$

Konkrétny tvar funkcie  $\Psi_1$  je nutné stanoviť experimentálne na modeli.

Modelové zákony vyplývajú zo zrovnania bezrozmerných kritérií podobnosti diela a modelu. Ak odlišíme čiarkou veličiny vzťahujúce sa k dielu, potom bude platiť:

$$\frac{q}{\sigma} = \frac{q'}{\sigma'}; \quad \frac{U_a}{a} = \frac{U_a'}{a'} \quad (10)$$

a po úprave:

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{q'}{q} = c_\sigma = c_q \quad (\text{konštanta napätí}) \quad (11)$$

$$\frac{a'}{a} = \frac{U'_a}{U_a} = c_a = c_{U_a} \quad (\text{konštanta vzdialeností}) \quad (12)$$

Ak zavedieme do kritérií podobnosti konštanty úmernosti  $c_\sigma (= c_q)$  a  $c_a (= c_{U_a})$ , získame nasledovné zákony podobnosti:

$$\frac{c_q}{c_\sigma} = 1; \quad \frac{c_{U_a}}{c_a} = 1 \quad (13)$$

Je zrejme, že tu dochádza k podobnosti bez "obmedzenia" (automodelovanie). Pre zostavenie modelu musíme brať ešte do úvahy podmienku mechanickej podobnosti, ktorá znamená:

$$c_a = \frac{c_q}{c_{\gamma_0}} \quad (14)$$

Ak sú objemová tiaž hornín, v ktorých je budované dielo, a objemová tiaž ekvivalentného materiálu v modeli rovnaké, potom rovnicu (14) dostaneme v tvare:

$$c_a = c_\sigma \quad (15)$$

čo znamená, že fyzikálne parametre, majúce rozmer napätí (pevnosť v prostom tlaku, modul pružnosti, zaťaženie a tak ďalej) musia byť v modeli v takej istej mierke ako lineárne rozmery. Bezrozmerné charakteristiky - koeficient Poissona, uhol vnútorného trenia, pomerné deformácie - ostávajú pritom bez zmien. V uvažovanom prípade je možné konštanty úmernosti  $c_\sigma (= c_a)$  voliť ľubovoľne, ale tak, aby napätia a posunutia bolo možné merať čo najpresnejšie. Tejto podmienke i technickým možnostiam v použitom modelovacom ráme najlepšie vyhovovala mierka  $c_\sigma = 30$  (to je 30:1), ktorá je veľmi podobná ako u Heuera a veľkostne sa nachádza medzi mierkami Jacobihho a Hobbsa.

Hodnoty zaťaženia výstuže  $q$  v ľubovoľnom bode na obvođe banského diela stanovíme cez podobnostné transformácie, alebo priamo výpočtom z nájdenej vzťahovej rovnice (9).

### Záver

Záverom treba podotknúť, že úlohu určenia kritického zaťaženia výstuže pomocou fyzikálneho modelového výskumu je možné riešiť aj inými postupmi, napríklad sú to riešenia vychádzajúce zo známych vzťahových rovníc zaťaženia prierezov u malých pomerov hrúbky k poloosiám (telesá tvaru škrupín). Tieto postupy však vyžadujú osobitnú pozornosť širšieho rozsahu.

### Literatúra

- Bartalský, J.: Nerastné suroviny Slovenska. 5. Slovenská geologická konferencia. *Mineralia Slovaca, Bratislava 1990.*
- Bukovanský, S.: Podmienky a charakter prechodu okrajové časti uhelné sloje do mezného napätového stavu v protiotfesošom boji se zřetelom k důlním podmínkám v OKR. *Acta Montanistica Slovaca, č. 1, 1999.*
- Denkhaus, H.G.: Discussion Comments. *Proc. Symp. Planning Open Pit Mines. Johannesburg 1970.*
- Đurove, J.: Analýza stability dlhých banských diel uhoľných ložísk SR pomocou fyzikálneho modelovania. *Kandidátska dizertačná práca, F BERG TU v Košiciach, 1994.*
- Fumagalli, E.: Statical and Geomechanical Models. *Springer-Verlag, Wien 1973.*
- Hatala, J.: Základné teoretické otázky stability dlhých banských diel. *Habilitačná docentská práca. BF VŠT Košice 1978.*
- Kitagawa, T., Kumeta, T., Ichizio, S., Soga, M., Sato, M. and Yasukawa, M.: Application of convergence confinement analysis to the study of preceding displacement of a squeezing rock tunnel. *Rock mechanics and rock engineering, 24/1991.*
- Kožešník, J.: Teorie podobnosti a modelování. *Academia, Praha 1983.*
- Machálek, M.: Prognóza anomálních projevů horských tlaků použitím modelů z ekvivalentních materiálů. *Záv. správa VVUÚ, Ostrava – Radvanice 1980.*
- Maras, M.: Analýza spevňujúcej a stabilizačnej funkcie svorníkovej výstuže. *Kandidátska dizertačná práca. F BERG TU v Košiciach, 1995.*
- Sasvári, T.: Geotechnický opis ložísk nerastných surovín. *Acta Montanistica Slovaca, 2/96, Košice, 1996, s. 147-150.*

