

Vplyv dĺžky aproximačného obdobia na presnosť prognózovania cien hliníka na Londýnskej burze kovov

Marcela Lascáková¹

Contribution about the influence of the approximation period on the accuracy of Aluminium prices forecasting on the London Metal Exchange

In this paper I devote to the verifying of derived numerical model of Aluminium prices forecasting on the London Metal Exchange. I deal with influence of approximation period on the accuracy of acquired prognosis. I find out, the prognosis obtained by longer approximation terms is more accurate.

Key words: forecasting, numerical modelling, exponential approximation, the Cauchy initial problem of the ordinary differential equation

Úvod

Najvplyvnejším miestom v oblasti tvorby cien kovov je Londýnska burza kovov (London Metal Exchange – LME). Sledovanie vývoja a predpovedanie pohybu cien predstavuje stále aktuálnu problematiku. Existuje množstvo prístupov k predpovedaniu pohybu cien kovov, medzi inými aj prístupy založené na matematických modeloch. Prognózovanie je často založené na štatistických modeloch, využívajúcich množstvo historických údajov.

Cieľom príspevku je vytvorenie a overenie analytického modelu prognózovania, ktorý vyžaduje výrazne nižšie množstvo údajov oproti štatistickým modelom. Zostavený analytický model využíva na prognózovanie cien odvodené numerické vzorce riešenia Cauchyho začiatočnej úlohy obyčajnej diferenciálnej rovnice, založené na exponenciálnej aproximácii a je orientovaný na prognózovanie cien hliníka, ktoré v sledovanom období rokov 2003 – 2006 zaznamenávali rastúci trend s občasnými výkyvmi (obr. 1). Hodnoty cien získané z oficiálnej internetovej stránky Londýnskej burzy kovov [2] sú mesačnými priermi denných uzatváracích cien hliníka „Cash Seller & Settlement price“.

Matematický model

Nech Cauchyho začiatočná úloha má tvar

$$y' = a_1 y \text{ so začiatočnou podmienkou } y(x_0) = y_0. \quad (1)$$

Partikulárne riešenie tejto úlohy je funkcia, kde, $y = a e^{kx}$, $a = y_0 e^{-a_1 x_0}$, $k = a_1$.

Pri vytváraní prognóz bolo postupované v týchto krokoch:

- A. **Aproximácia hodnôt** – vybrané hodnoty boli aproximované metódou najmenších štvorcov exponenciálnou funkciou tvaru $\tilde{y} = a_0 e^{a_1 x}$.
- B. **Zostavenie Cauchyho začiatočnej úlohy** – na základe získanej aproximačnej funkcie bola zapísaná Cauchyho začiatočná úloha v tvare (1). Hodnoty začiatočnej podmienky boli volené z údajov posledného mesiaca aproximácie, kde je poradové číslo x_0 mesiaca a cena hliníka y_0 v uvažovanom mesiaci.
- C. **Tvorba prognóz** – zvolená Cauchyho úloha bola riešená odvodenou numerickou metódou založenou na exponenciálnej aproximácii. Podrobný spôsob odvodenia je uvedený v [1].

Numerické vzorce riešenia Cauchyho začiatočnej úlohy majú tvar:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h, \\ y_{i+1} &= y_i + bh + Qe^{yx_i} [e^{yh} - 1], \end{aligned} \quad (2)$$

pre $i=0, 1, 2, \dots$, kde $h = x_{i+1} - x_i$ je krok metódy konštantnej veľkosti.

¹ Mgr. Marcela Lascáková, Strojnícka fakulta, Katedra aplikovanej matematiky, Letná 9, 042 00 Košice, tel.: +421 55 602 2219, marcela.lascakova@tuke.sk
(Recenzovaná a revidovaná verzia dodaná 20. 11. 2007)

Koeficienty v numerickom vzorci sú počítané pomocou vzťahov:

$$v = \frac{f''(x_i, y_i)}{f'(x_i, y_i)}, \quad Q = ce^u = \frac{f'(x_i, y_i) - f''(x_i, y_i)}{(1-v)v^2 e^{vx_i}}, \quad b = f(x_i, y_i) - \frac{f'(x_i, y_i)}{v}. \quad (3)$$

Pre Cauchyho začiatočnú úlohu (1) je $f(x_i, y_i) = a_1 y_i$, a tak $f'(x_i, y_i) = a_1 y'(x_i) = a_1^2 y_i$,
 $f''(x_i, y_i) = a_1^2 y'(x_i) = a_1^3 y_i$.

Numerický výpočet a jeho výsledky

Bolo sledované správanie sa odvodeného numerického modelu pri prognózovaní cien hliníka, pričom bol sledovaný **vplyv dĺžky aproximačného obdobia na presnosť prognózy**. Boli volené aproximačné obdobia rôznej dĺžky a zisťované, či dĺžka aproximačného obdobia ovplyvňuje presnosť prognózy.

Pri prognóze obdobia *január 2006 – jún 2006* boli využité aproximačné funkcie získané z hodnôt:

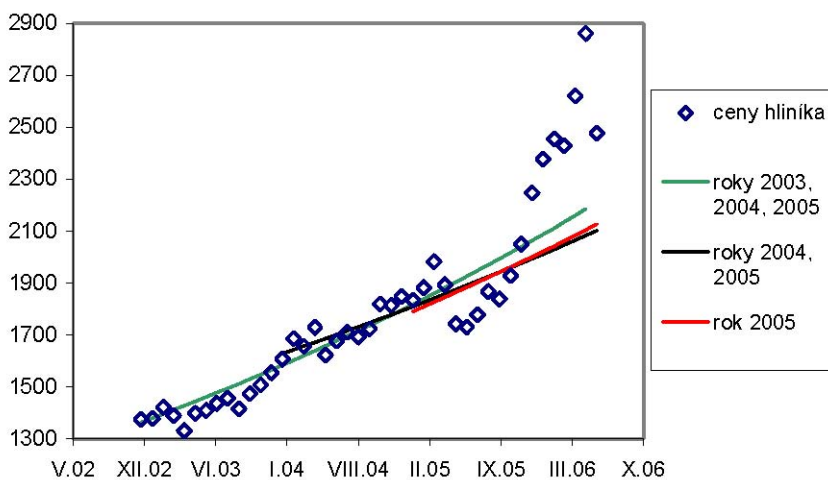
1. roka 2005,
2. rokov 2004, 2005,
3. rokov 2003, 2004, 2005.

Hodnoty začiatočných podmienok v Cauchyho úlohách (1) boli volené z údajov pre mesiac december 2005. Boli vypočítané prognózy cien pre mesiace obdobia *január 2006 – jún 2006*, pričom boli sledované odchýlky prognóz od skutočných hodnôt (v % zo skutočnej ceny pre sledovaný mesiac) a určený ich aritmetický priemer. Získané výsledky sú uvedené v tab. 1.

Tab. 1. Prehľad výsledkov prognózovaného obdobia *január 2006 – jún 2006*.
 Tab. 1. Review of results for forecasting period *January 2006 – June 2006*.

Aproximačné obdobie	Aproximačná funkcia	Cauchyho začiatočná úloha	Aritmetický priemer odchýlok [%]
rok 2005	$\tilde{y} = 1773,1 e^{0,0101 x}$	$y' = 0,0101 y, y(12) = 2247,45$	8,36
roky 2004, 2005	$\tilde{y} = 1614,3 e^{0,0088 x}$	$y' = 0,0088 y, y(24) = 2247,45$	8,71
roky 2003, 2004, 2005	$\tilde{y} = 1348,5 e^{0,0115 x}$	$y' = 0,0115 y, y(36) = 2247,45$	7,97

Prognózované ceny pre sledované mesiace nie sú výrazne rozdielne pre rôzne dlhé aproximačné obdobia. Najvýhodnejšia je prognóza vznikajúca na základe aproximácie najdlhšieho obdobia (roky 2003, 2004, 2005), kde aproximačná funkcia nadobúda najpruďší priebeh (obr. 1), aj hodnoty počítanej prognózy najpruďšie rastú, čím sa dokážu najlepšie priblížiť k skutočným cenám (v období *január 2006 – jún 2006* ceny prudko narastali). Najmenej presná prognóza vzniká pre aproximačné obdobie rokov 2004, 2005 (stredne dlhé obdobie).



Obr. 1. Grafy aproximačných funkcií.

Fig. 1. Graphs of the approximation functions.

Ak nás zaujímajú príčiny daného stavu, potrebujeme najskôr popísať vývoj cien hliníka v sledovaných rokoch:

- rok 2004 – pozvoľný nárast cien hliníka bez výrazne prudkých zmien,
- rok 2005 – po začiatočnom náraste cien v mesiacoch január 2005 - marec 2005 nastáva prudký pokles v období apríl 2005 – jún 2005 s následným kolísavým rastom od júla 2005, ktorého prudkosť sa v závere zvyšuje,
- rok 2006 – prudký nárast cien.

Po poklese cien v roku 2005 je nárast hodnôt obrovský v priebehu obdobia jedného roka (jún 2005: 1731,30 \$ za tonu, máj 2006: 2861,48 \$ za tonu). Teda pre najkratšie aproximačné obdobie (pozostávajúce z cien roka 2005) je charakteristický veľký rozptyl hodnôt. Tým má získaná aproximačná funkcia prudší priebeh, a preto aj počítaná prognóza lepšie zachytáva nárast cien v roku 2006. Pri stredne dlhom aproximačnom období sa k cenám roka 2005 pridávajú ceny roka 2004, ktoré mierne rastú bez prudkých výkyvov. Preto aproximačná funkcia a tiež prognóza sú pozvoľnejšie, a tým priemerná chyba vypočítanej prognózy je vyššia. Pri aproximácii najdlhšieho obdobia berieme do úvahy ceny rokov 2003, 2004, 2005. Pridaním roka 2003 pribudnú nižšie ceny, rozptyl hodnôt sa zvýši, čím sa stáva priebeh aproximačnej funkcie najprudší.

Výsledkom tejto analýzy je zistenie, že najpresnejšia prognóza pre obdobie *január 2006 – jún 2006* je získaná pomocou najdlhšieho aproximačného obdobia (prognóza nadobúda najnižšiu priemernú chybu aj najnižšie odchýlky v každom mesiaci prognózy).

Daný poznatok si možno overiť aj pri výpočte priebežných prognóz získaných počas celého obdobia tvorby prognóz: január 2004 – jún 2006.

Pre tri typy aproximačných období:

- Aproximované hodnoty boli za obdobia **január 2003 – jún 2003** a ďalšie aproximačné obdobia boli tvorené **postupným predlžovaním** tohoto obdobia o **3 mesiace**, čím sa dĺžka aproximačných období predĺžila. Dĺžka *n-tého* obdobia je $6+3 \cdot (n-1)$ mesiacov.
- Aproximované hodnoty boli vždy dĺžky **12 mesiacov** a aproximačné obdobia boli postupne **posúvané o 3 mesiace** (prvé aproximačné obdobie: január 2003 – december 2003).
- Aproximované hodnoty boli vždy dĺžky **6 mesiacov**, pričom boli tieto obdobia **posúvané o 3 mesiace** (prvé aproximačné obdobie: január 2003 – jún 2003).

Pre všetky získané aproximačné funkcie boli počítané prognózy cien pre nasledujúcich 6 mesiacov. Bolo získaných 9 spoločných prognóz pre všetky varianty, v ktorých bol počítaný aritmetický priemer mesačných odchýlok (v % zo skutočnej ceny) a určený počet chýb v prognóze presahujúcich hranicu 10 % zo skutočnej ceny. Chyby boli nazvané kritickými hodnotami prognózy. Získané údaje sú uvedené v nasledujúcich tabuľkách (tab. 2, 3).

Tab. 2. Priemerné odchýlky prognóz cien (v %).

Tab. 2. The average discrepancy of price prognosis (in %).

Prognózy	A	B	C
január 2004 – jún 2004	3,72	3,72	3,18
apríl 2004 – september 2004	3,34	4,90	7,29
júl 2004 – december 2004	1,62	1,10	3,80
október 2004 – marec 2005	3,63	3,89	6,42
január 2005 – jún 2005	5,99	5,25	7,21
apríl 2005 – september 2005	14,45	14,60	14,84
júl 2005 – december 2005	7,59	9,31	14,82
október 2005 – marec 2006	14,83	17,87	16,90
január 2006 – jún 2006	8,04	8,36	4,76

Tab. 3. Vplyv rôznych dlhých aproximačných období na presnosť prognózy cien.

Tab. 3. The influence of various approximation period on the accuracy of price prognosis.

Variant	Aritmetický priemer priemerných odchýlok prognóz [%]	Počet kritických hodnôt vo všetkých prognózach	Počet priemerných odchýlok >10 % z 9 prognóz	Počet minimálnych priem. odchýlok v rámci variantov A, B, C
A	7,02	15 (v 5-tich prognózach)	2	5
B	7,67	16 (v 5-tich prognózach)	2	2
C	8,80	17 (v 7-mych prognózach)	3	2

V presnosti spoločných prognóz nie sú výrazné rozdiely pri rôzne dlhých aproximačných obdobiach. Najvýhodnejšie bolo najdlhšie aproximačné obdobie (variant A) v sledovaných parametroch, najhoršie výsledky dosahujú prognózy pre najkratšie aproximačné obdobie dĺžky 6 mesiacov (variant C).

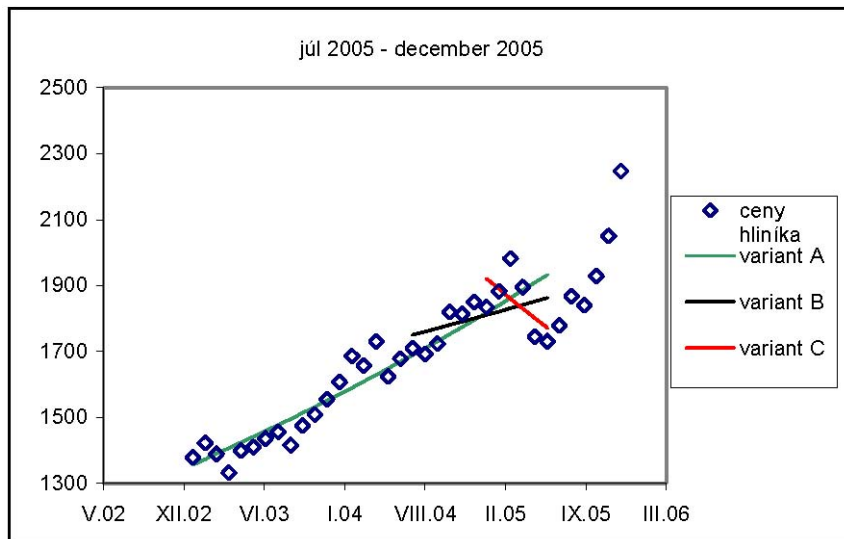
Zaujímavá je rôzna stratégia zachytenia trendu vývoja cien pri výraznejších výkyvoch vo vývoji cien. Presnosť a charakter tvorby prognóz bol analyzovaný vo variantoch A, B, C.

- január 2004 – marec 2005** (zahŕňa 5 prognóz: *január 2004 – jún 2004, ..., január 2005 – jún 2005*)
 V tomto období ceny pozvoľne narastajú. Vo vývoji cien nastáva prudká zmena až v závere obdobia (apríl 2005). Všetky sledované varianty tvoria prognózy, ktorých priemerné chyby sú menšie ako 10 %. Najmenej presné prognózy cien získame v období *január 2005 – jún 2005*, a to A: 5,99 %, B: 5,25 %, C: 7,21 %. Súčasťou tohto obdobia je už prvá prudká zmena vo vývoji ceny hliníka. Presnejšie sú prognózy cien získané pomocou dlhších aproximačných období (varianty A, B), aj keď rozdiely v tomto období nie sú výrazné.
- apríl 2005 – december 2005** (zahŕňa 2 prognózy)
 Obdobie je charakteristické prudkým poklesom cien s následným nárastom cien od júla 2005. Keďže predchádzajúci trend bol pozvoľne rastúci, výraznejší pokles bol nečakaný, takže žiadny z variantov A, B, C nezachytí zmenu. Aritmetický priemer percent chýb mesačných prognóz zo skutočných cien prvýkrát presiahne hranicu 10 %, a to A: 14,45 %, B: 14,60 %, C: 14,84 %. Získané hodnoty sú veľmi podobné, ale rozdielna je nasledujúca stratégia zachytenia klesajúceho trendu. Pokles cien vyvolá v nasledujúcom období prognóz (*júl 2005 – december 2005*) zníženie rýchlosti rastu aproximačných funkcií (dokonca variant C nadobúda klesajúcu funkciu). Zmeny v tvare aproximačných funkcií zaznamenáva tab. 4 a obr. 2.

Tab. 4. Aproximačné funkcie pre tvorbu prognóz cien.

Tab. 4. The approximation functions for creating of price prognosis.

Variant	apríl 2005 – september 2005	júl 2005 – december 2005
A	$\tilde{y} = 1315,4 e^{0,0140x}$	$\tilde{y} = 1340 e^{0,0122x}$
B	$\tilde{y} = 1303,8 e^{0,0144x}$	$\tilde{y} = 1574,2 e^{0,0056x}$
C	$\tilde{y} = 1286,1 e^{0,0151x}$	$\tilde{y} = 2872,7 e^{-0,0161x}$



Obr. 2. Grafy aproximačných funkcií.
 Fig. 2. Graphs of the approximation functions.

Od júla 2005 nastáva opätovný nárast cien, s ktorý zachytávajú jednotlivé varianty rôzne. Vo variante C má aproximačná funkcia pre tvorbu prognóz obdobia *júl 2005 – december 2005* klesajúci priebeh (aproximuje hodnoty *január 2005 – jún 2005*, počas ktorých ceny výrazne klesali). Tým však prognóza má tiež klesajúci charakter, a tak nezachytí opätovný nárast cien (priemerná chyba prognózy je 14,84 %).

Naproti tomu, zmiernenie prudkosti rastu aproximačných funkcií variantov A, B v období *júl 2005 – december 2005* nie je tak výrazné. Tieto varianty aproximujú obdobia, v ktorých pokles hodnôt v období *apríl 2005 – jún 2005* je len istou časťou a menej ovplyvňuje celok. Keďže pokles rýchlosti rastu aproximačných funkcií variantov A, B nie je taký prudký, prognózy obdobia *júl 2005 – december 2005* zachytia nárast cien. Aritmetický priemer chýb prognóz cien pre mesiace obdobia *júl 2005 – december 2005*: A: 7,59 %, B: 9,31 %, C: 14,82 %.

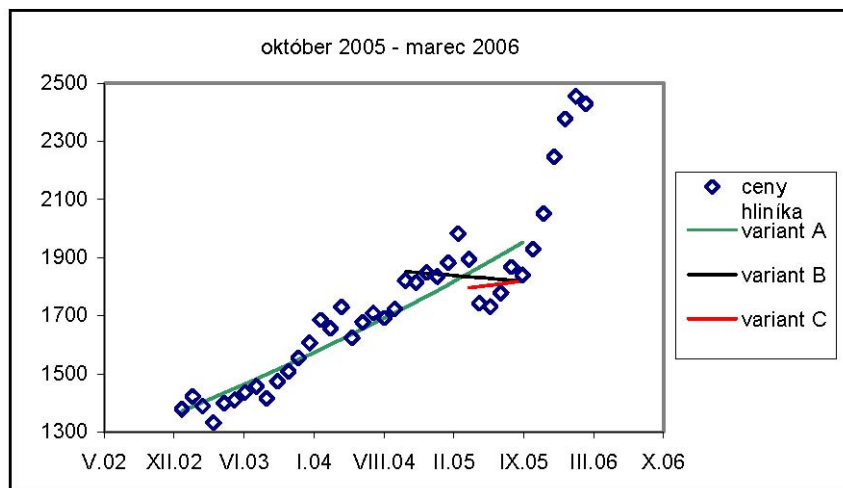
• **október 2005 – marec 2006**

Obdobie s prudkým nárastom cien. Žiadny z variantov nezachytí prudkú zmenu hodnôt, a tak v tomto období sú priemerné chyby prognóz väčšie ako 10 %: A: 14,83 %, B: 17,87 %, C: 16,90 %.

Znova sa mení rýchlosť rastu aproximačných funkcií (tab. 5, obr. 3).

Tab. 5. Aproximačné funkcie pre tvorbu prognóz cien.
Tab. 5. The approximation functions for producing price prognosis.

Variant	júl 2005 – december 2005	október 2005 – marec 2006
A	$\tilde{y} = 1340 e^{0,0122x}$	$\tilde{y} = 1357,3 e^{0,0110x}$
B	$\tilde{y} = 1574,2 e^{0,0056x}$	$\tilde{y} = 1918,2 e^{-0,0016x}$
C	$\tilde{y} = 2872,7 e^{-0,0161x}$	$\tilde{y} = 1675,1 e^{0,0025x}$



Obr. 3. Grafy aproximačných funkcií.
Fig. 3. Graphs of the approximation functions.

V tomto období hodnoty z obdobia poklesu cien (apríl 2005 – jún 2005) výraznejšie zasiahnu aj dlhšie aproximačné obdobia, ktoré ich vplyvom zaznamenávajú pokles rýchlosti rastu. Výraznejšie je ovplyvnená aproximačná funkcia variantu B, pretože aproximuje kratšie obdobie oproti variantu A, a to október 2004 – september 2005. Súčasťou tohto obdobia je pokles hodnôt, čím sa aproximačná funkcia stáva až klesajúcou. Práve tento tvar aproximačnej funkcie spôsobí najväčšiu priemernú chybu prognóz zo všetkých variantov v období október 2005 – marec 2006 (17,87 %).

Pre variant A je aproximačné obdobie pre tvorbu prognóz obdobia október 2005 – marec 2006: január 2003 – september 2005. Toto obdobie tiež obsahuje hodnoty poklesu cien, ale vzhľadom na dlhšie aproximačné obdobie nie je vplyv hodnôt poklesu taký výrazný (aj keď spôsobia pokles rýchlosti rastu aproximačnej funkcie). Pritom rýchlosť rastu aproximačnej funkcie je stále najväčšia (funkcia najprudšia), a tak je priemerná chyba prognózy v tomto období najmenšia (14,83 %).

Variant C zaznamenáva najprudší nárast hodnôt exponenciálnej funkcie, avšak jej pokles v predchádzajúcom období bol taký výrazný, že rýchlosť jej rastu je pomalšia než rýchlosť rastu cien, a tým je priemerná chyba prognózy tiež väčšia ako 10 % (16,90 %).

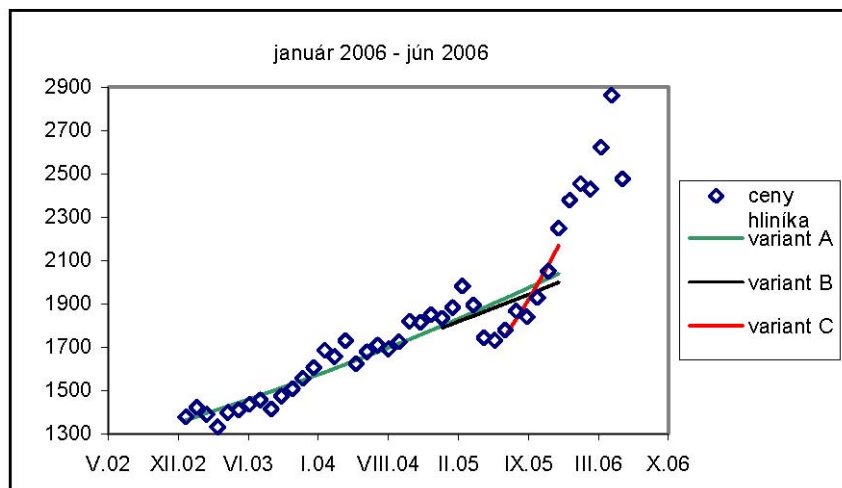
• **január 2006 – jún 2006**

Predstavuje obdobie s prudkým nárastom cien až na jún 2006, v ktorom cena poklesla. Vzhľadom na predchádzajúci rast cien, všetky varianty zachytia rastúci trend. A tak priemerné chyby prognóz sú menšie ako 10 %: A: 8,04 %, B: 8,36 %, C: 4,76 %.

Je zaujímavé opätovné porovnanie rýchlosti rastu aproximačných funkcií (tab. 6, obr. 4).

Tab. 6. Aproximačné funkcie pre tvorbu prognóz cien.
Tab. 6. The approximation functions for creation of price prognosis.

Variant	október 2005 – marec 2006	január 2006 – jún 2006
A	$\tilde{y} = 1357,3 e^{0,0110x}$	$\tilde{y} = 1348,5 e^{0,0115x}$
B	$\tilde{y} = 1918,2 e^{-0,0016x}$	$\tilde{y} = 1390,4 e^{0,0101x}$
C	$\tilde{y} = 1675,1 e^{0,0025x}$	$\tilde{y} = 464,65 e^{0,0428x}$



Obr. 4. Grafy aproximačných funkcií.
Fig. 4. Graphs of the approximation functions.

Najprudší nárast zaznamenáva aproximačná funkcia variantu C, ktorá aproximuje hodnoty obdobia júl 2005 – december 2005, teda hodnoty z obdobia začínajúceho vzrastu. Tým sa dokáže rýchlejšie prispôbiť prudkému rastu. Keďže nenastáva zmena trendu, jej prognóza je najpresnejšia.

Pri variante A je nárast rýchlosti rastu aproximačnej funkcie oveľa menší, a tak je priemerná chyba prognózy väčšia (avšak stále pod hranicou 10 %).

Variant B má prudšiu zmenu nárastu aproximačnej funkcie ako variant A, avšak v predchádzajúcom období bola aproximačná funkcia klesajúca. Tým je rýchlosť rastu aproximačnej funkcie variantu B nižšia ako vo variante A, teda najnižšia zo všetkých sledovaných variantov. A tak prognóza nadobúda najväčšiu priemernú chybu.

Vzhľadom na analýzu presnosti prognóz v jednotlivých obdobiach možno povedať, že prognózy sa správajú prijateľne (s priemerným percentom chyby zo skutočnej ceny menším ako 10 %) pri stabilnom trende vývoja cien (napr. rast cien v období január 2004 – marec 2005). Ak dochádza k prudkým zmenám (prudkému poklesu/nárastu cien) varianty nedokážu primerane zachytiť tento trend.

Dlhšie aproximačné obdobia (variant A) nereagujú dostatočne rýchlo na zmenu trendu, prispôbujú sa pozvolnejšie. To spôsobuje väčšinou po prvom neúspešnom období prognózovania zachytenie trendu (úpravu priemernej chyby prognózy pod 10 %).

Kratšie aproximačné obdobia (variant C) výrazne reagujú na každú zmenu trendu. Čím je zmena väčšia, tým je reakcia výraznejšia. Pri jednostrannom výkyve hodnôt (napr. len raste hodnôt: október 2005 – máj 2006) dokážu rýchlejšie zachytiť trend ako aproximácie dlhších období. Problém nastáva pri prudkej zmene jedným smerom a následnou zmenou opačným smerom (napr. prudký pokles cien: apríl 2005 – jún 2005 s následným prudkým vzrastom hodnôt v období júl 2005 – máj 2006). Prudký pokles spôsobí výrazné zmiernenie rastu aproximačnej funkcie (dokonca až na klesajúci priebeh), a tak počítaná prognóza nedokáže primerane zachytiť vzrast hodnôt.

V prípade aproximačného obdobia dĺžky 1 rok (variant B) aproximačné funkcie reagujú citlivejšie na prudké zmeny než vo variante A. Zároveň rýchlosť zmeny rastu aproximačnej funkcie je nižšia ako pri variante C, čím schopnosť prispôbenia sa prudkej zmene je pomalšia.

Záver

Na základe získaných výsledkov možno tvrdiť, že dĺžka aproximačného obdobia vplyva na presnosť získaných prognóz. Výraznejšie rozdiely sledujeme v období s výkyvmi vo vývoji cien. Zo všeobecného hľadiska najmenšiu chybu prognóz dosahujú prognózy získané pomocou dlhších aproximačných období, a to tým, že nepodliehajú prudkým zmenám a držia sa najvýraznejšieho trendu.

Literatúra - References

- [1] Penjak, V., Lascsáková, M.: Solution of the Cauchy problem for the ordinary differential equation by means of the exponential approximation. *Studies of University in Žilina, Mathematical-Physical Series, Vol. 13, (2001), pp. 163 – 166.*
- [2] <http://www.lme.co.uk>