

Vplyv chybných meraní na vlastnosti geodetických sietí

Vincent Jakub¹ a Janka Sabová²

Influence of bad measurements in properties of Geodetic Network

In establishment of LGS (Local geodetic Net) some given coordinated points from the relevant area are used, new points are established and the required distances and angles among the points are measured. If some measurements are defective, the net adjustment with the obtained values is depreciated, unacceptable. In the paper there is given an identification method of incorrect measurement results. The faulty results are eliminated in a new adjustment or the relevant defective measurements are repeated for obtaining correct values.

Key words: Error source in measurements, adjustment of a local geodetic network by squares method, identification incorrect results, corrective progress

Úvod

Pri zakladaní dvojrozmerných lokálnych geodetických sietí (2D LGS) môže vplyvať na výsledky merania a spracovania sietí niekoľko typických druhov chýb, ktorých prítomnosť môže znehodnotiť kvalitu vytváranej siete, resp. zapríčiniť jej nepoužiteľnosť. Najväznejšie a najčastejšie znehodnotenie výsledkov zapríčínajú:

- výrazná dekompatibilita geodetických bodov (Weiss, G. et al., 2006, Jakub, 2004 a iní), ktoré sú už v danom priestore vybudované a funkčné a majú v databáze svoje súradnice (neodpovedajúce ale ich fyzickej polohe),
- chybné zamerané štruktúrne prvky siete (dĺžky, uhly, iné veličiny),
- chybné určené približné súradnice niektorých nových, v súčasnosti založených bodov pre potreby LGS.

Nesprávne hodnoty veličín, ich riešenia a väzby, sa prejavujú v postupných výsledkoch vyrovnania a po ukončení výpočtov vznikne celkový obraz o vyrovnaní LGS s jej chybami a nepoužiteľnosťou.

Preto už čiastkové výsledky vyrovnania je potrebné analyzovať a zisťovať príčiny prípadných negatívnych vplyvov. Chybné veličiny a vzťahy v LGS v rámci vyrovnania znehodnotia viaceré čiastkové ako aj finálne výsledky (v numerickej forme) a teda svojou povahou a veľkosťou formujú nevyhovujúcu kvalitu LGS.

Dominantný vplyv na výsledky spracovania LGS majú zo vstupných veličín matice L (veličiny merané alebo známe: dĺžky, uhly a iné prvky), $C^0 = [X^0 Y^0]$ (približné hodnoty súradníc určených nových bodov v LGS), $C = [XY]$ (databázové súradnice kompatibilné alebo aj dekompatibilné), s ktorými sa chybné vstupné veličiny a iné negatívne vplyvy dostanú do vyrovnania.

V predloženom pojednaní, na konkrétnej situácii LGS so známymi parametrami, je demonštrovaný (na základe neprijateľných výsledkov vyrovnania LGS) postup odhalenia príčin takých výsledkov a sú uvedené korekčné kroky pre získanie prijateľných čiastkových i finálnych výsledkov z vyrovnania LGS.

Pre tvorbu kvalitnej LGS je potrebné v rámci jej spracovania vzniknuté problémy správne identifikovať (ich príčiny a väzby), t.j. na základe detekovaných čiastkových situácií odstrániť príčiny generovania chýb. Tak sa môžu vytvoriť aj z "očistených", pôvodne chybných údajov spoľahlivé, kvalitné LGS.

Vyrovnanie LGS

V procese vyrovnania LGS s chybnými údajmi a vzťahmi sa ich prítomnosť a vplyvy preukážu, resp. dajú identifikovať rôznymi postupmi. LGS sa prevažne spracúva aplikáciou Metóda najmenších štvorcov (MNŠ) vyrovnania Gaussovho-Markovovho modelu (GMM) sprostredkujúcich meraní (Höpfcke, 1980; Biacs, 1989; Wolf, H, 1997 a iní).

Vyrovňavací proces sa realizuje štandardným riešením MNŠ odhadov súradníc $\hat{C}(\hat{X}\hat{Y})$ všetkých bodov LGS, najčastejšie podľa vzťahov

¹ Ing. Vincent Jakub, PhD., h.prof., GEOMETRA, Pražská 4, 04011 Košice

² prof. Dr. Ing. Janka Sabová, Ústav geodézie, kartografie a geografických informačných systémov, Park Komenského 19, 042 00 Košice, janka.sabova@tuke.sk
(Recenzovaná a revidovaná verzia dodaná 18. 3. 2009)

$$\hat{C} = C^0 + d\hat{C}$$

$$\hat{C} = C^0 + N^+ A^T Q_L^{-1} dL = C^0 + (A^T Q_L^{-1} A)^+ A^T Q_L^{-1} (L - L^0),$$

s využitím 4 matic. Sú to:

Matica konfigurácie siete A (n, k) obsahuje koeficienty a_{ij} ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, k$) s nulovými aj nenulovými hodnotami, ktoré sú funkciami približných hodnôt súradníc a observovaných veličín, teda

$$a_{ij} = f(C^0(X_i^0, Y_i^0), C(X_i, Y_i), L = g(d, u)).$$

Teda A sa tvorí podľa druhu, rozmiestnenia aj podľa kvality observácií dĺžok "d", vodorovných uhlov "u" prípadne aj ďalších veličín v sieti.

Keďže v danom prípade voľného vyrovnania matica A je singulárna a teda aj matica koeficientov normálnych rovníc $N(k, k) = A^T Q_L^{-1} A$, použijú sa na tvorbu nesingulárnej matice N rôzne postupy (Wolf, 1997; Biacs, 1989; Höpcke, 1980 a iní). Bežne sa použije pseudoinverzná matica $N^+(k, k)$ matice N , ktorú je možné vytvoriť viacerými postupmi.

Na správne obsadenie A a korektnosť určenia koeficientov a_{ij} použijú sa aj rôzne numerické kontroly (Böhm et al., 1990; Reissmann, 1980; Gotthardt, 1978; Wolf, 1997).

Matica kofaktorov $Q_L(n, n)$ observácií sa tvorí na základe vlastností (presností) použitých meracích prístrojov a zariadení deklarovaných výrobcom. K určeniu kofaktorov q_d, q_u sa použijú apriórne štandardné odchýlky S_d, S_u a empiricky dosiahnuté aposteriórne štandardné odchýlky s_d, s_u z realizovaných meraní podľa:

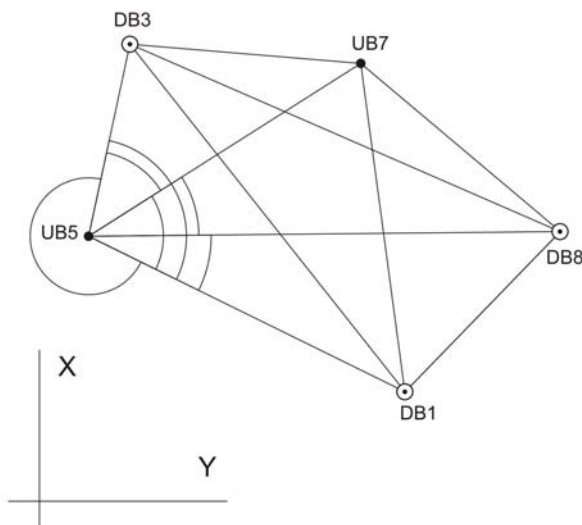
$$q_d = s_d^2 / S_d^2, \quad q_u = s_u^2 / S_u^2.$$

Matica kofaktorov Q_L sa vytvára ako diagonálna. Na vyjadrenie kvality meraní aplikujú sa aj iné spôsoby tvorby kofaktorov, resp. váh.

Matica približných hodnôt súradníc $C^0(X^0, Y^0)$ určovaných bodov sa vytvára:

- zo súradníc jestvujúcich bodov v priestore LGS, ktoré sa pre realizované riešenie považujú za približné súradnice C^0 príslušných bodov,
- z novo založených bodov v priestore LGS; jednoduchými metódami (rajóny, pretínania, ...) sa určia ich súradnice, deklarované a použité tiež ako C^0 .

Matica redukovaných observácií $dL = L - L^0$, t.j. diferencií medzi meranými hodnotami L a približnými hodnotami L^0 geometrických prvkov LGS sa generuje z hodnôt $dl_i = l_i - l_i^0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), t.j. z rozdielov meraných hodnôt $l(d, u)$ a odpovedajúcich približných hodnôt $l^0(d^0, u^0)$ určených z príslušných výpočtov s použitím C^0 aj C . Chyby v približných l^0 a v meraných l hodnotách ovplyvnia tvorbu vektora dL , ktorý bude teda obsahovať aj chybné prvky $|dl_i|$ a ktoré zaťažia (skreslia) rôznou mierou výsledky vyrovnania.



Vyrovnanie LGS s chybné zameranou dĺžkou

Uvažujme konkrétnu situáciu LGS podľa obr. 1 s bodmi: B1, B3, B8 ako s dátumovými bodmi (DB) so súradnicami z databázy a s bodmi: B5, B7 ako určenými bodmi (UB) s približnými hodnotami ich súradníc $C^0(X^0, Y^0)$, ako aj so zameranými 10 dĺžkami "d" medzi bodmi a so 6 vodorovnými uhlami "u" na bode B5. Všetkých 5 bodov LGS z voľného vyrovnania dostáva súradnice aj pre B1, B3, B8 (mierne odlišné od ich hodnôt v databáze).

Obr. 1. Lokálna geodetická sieť.
Fig. 1. Local geodetic network.

Sieť sa teda vyrovnala ako voľná sieť s použitím Gaussovho-Markovovho modelu (GMM) a sprostredkujúceho vyrovnania, t.j. všetkých 5 bodov siete sa použilo vo vyrovnaní so súradnicami deklarovanými ako približnými súradnicami C^0 .

Pre vyrovnanie boli použité dané, merané a vytvorené (vstupné) veličiny a funkcie, t.j. približné súradnice C^0 bodov LGS, dĺžky "d" a uhly "u" vo výpočtovej rovine, ako aj ich približné hodnoty d^0 , u^0 , apriórne a aposteriórne štandardné odchýlky dĺžok a uhlov S_d , S_u , s_d , s_u , kofaktory meraných veličín q_d , q_u a vektor redukovaných observácií (tab. 1-4).

Tab. 1. Približné súradnice C^0 bodov LGS.
Tab. 1. Approximate coordinates C^0 of the points LGN.

Bod	X^0	Y^0
1	1239001,117	264506,302
3	1239894,221	263803,978
8	1239413,399	264904,551
5	1239400,501	263697,862
7	1239842,532	264393,247

Tab. 2. Merané d,u, približné hodnoty d^0 , u^0 (dĺžok a uhlov) a ich apriórne a aposteriórne štandardné odchýlky S_d, S_u, s_d, s_u .
Tab. 2. Measured d, u, approximate values d^0 , u^0 (distances and angles) and their aprior and aposterior standard deviations S_d, S_u, s_d, s_u .

d	d [m]	d^0 [m]	s_d [mm]	S_d [mm]	u	u [g]	u^0 [g]	S_u [cc]	s_u [cc]
1-5	901,712	0,716	4,8	4,2	7-5-1	65,2596	0,2587	10	8,4
5-3	504,941	0,991	4,0	4,4	3-5-7	50,4742	0,4747	10	8,4
3-7	591,532	0,535	4,2	3,8	3-5-1	115,7338	0,7334	10	8,4
7-8	667,536	0,530	4,3	4,0	7-5-8	35,3689	0,3680	10	8,4
8-5	1206,707	0,713	5,4	5,8	1-5-3	284,2654	0,2666	10	8,4
5-7	823,985	0,989	4,6	4,9	8-5-1	29,8896	0,8907	10	8,4
7-1	848,977	0,975	4,7	5,2					
1-8	573,203	0,209	4,1	3,7					
8-3	1201,029	0,022	5,4	4,9					
3-1	1136,175	0,181	5,3	5,1					

Tab. 3. Kofaktory $q_d = s_d^2/S_d^2$, $q_u = s_u^2/S_u^2$ meraných veličín.
Tab. 3. Cofactors $q_d = s_d^2/S_d^2$, $q_u = s_u^2/S_u^2$ of measured values.

d	1-5	5-3	3-7	7-8	8-5	5-7	7-1	1-8	8-3	3-1
q_d	0,76	1,20	0,83	0,85	1,15	1,11	1,21	0,79	0,82	0,93
u	7-5-1	3-5-7	3-5-1	7-5-8	1-5-3	8-5-1				
q_u	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7				

Tab. 4. Vektor redukovaných observácií $dL = L - L^0$, t.j. doplnkov dL_d [mm] = $d - d^0$ a dL_u [cc] = $u - u^0$.
Tab. 4. Vector of reduced observations $dL = L - L^0$, i.e. corrections dL_d [mm] = $d - d^0$ and dL_u [cc] = $u - u^0$.

dL_d [mm]	-4	-49,6	-3	6	-6	-4	2	-6	7	-6
dL_u [cc]	4	-5	4	9	-12	-11				

Z aplikovaného voľného vyrovnania sa získali výsledky, ktoré už svojou veľkosťou charakterizujú ich prijateľnosť alebo zamietnutie priamo na základe ich vizuálneho posúdenia a hodnotenia.

V danom prípade sú rozhodujúce hodnoty :

- vektor redukovaných observácií dL , t.j. rozdiely medzi meranými hodnotami L a určenými L^0 z približných súradníc C^0 (tab. 4),
- vyrovnané doplnky súradníc $d\hat{X}$, $d\hat{Y}$ k približným hodnotám X^0, Y^0 a odhady súradníc \hat{X} , \hat{Y} bodov LGS (tab. 5):

Tab. 5. Vyrovnané doplnky súradníc $d\hat{X}$, $d\hat{Y}$ a odhady súradníc \hat{X} , \hat{Y} .

Tab. 5. Adjusted Coordinate corrections $d\hat{X}$, $d\hat{Y}$ and coordinate estimations \hat{X} , \hat{Y} .

BOD	$d\hat{X}$ [m]	$d\hat{Y}$ [m]	\hat{X} [m]	\hat{Y} [m]
1	-0,0062	-0,0056	1239001,111	264506,296
3	-0,0097	-0,0047	1239894,211	263803,973
8	-0,0069	-0,0021	1239413,372	264904,549
5	0,0041	0	1239400,505	263697,862
7	0,0187	0,0124	1239842,551	264393,259

- rezíduá ("opravy") V meraných hodnôt veličín d, u v LGS sú :
 - o $V(16,1) [\text{mm}, \text{cc}] = [3,6 \ 21,5 \ 6,4 \ -0,9 \ -6,7 \ 3,6 \ 21,4 \ 8,0 \ -5,7 \ 2,7 \ 2,2 \ 5,5 \ 2,7 \ 1,3 \ 5,3 \ 6,9]^T$,
 - o kvadratická forma reziduí: $KFR = 1168,787 \text{ mm}^2$,
 - o aposteriorna štandardná odchýlka meraní: $s_o = 11,396 \text{ mm}$,
 - o štandardné odchýlky súradnicových odhadov tab. 6.

Tab. 6. Štandardné odchýlky súradnicových odhadov.

Tab. 6. Standard deviations of coordinate estimations.

BOD	$s(\hat{X})$ [mm]	$s(\hat{Y})$ [mm]
1	4,9	6,9
3	13,3	6,9
8	5,9	6,5
5	6,9	4,4
7	7,3	6,5

Z uvedených výsledkov numerických hodnôt vyrovnania LGS vyplýva, že sú neprijateľné, keďže výsledné veličiny z vyrovnania sú, resp. obsahujú veľké, neprijateľné hodnoty dL , V , KFV , S_o , $S(\hat{C})$, ako aj niektoré hodnoty v $d\hat{X}$, $d\hat{Y}$. Tieto výsledky evidentne signalizujú určitú závalu (resp. závaly) vo vstupných veličinách, resp. v príslušných riešeniach v rámci vyrovnávacieho procesu. Zo štruktúry prvkov vyplýva, že príčiny neprijateľných výsledkov indikuje priamo vektor dL , keďže obsahuje chybné hodnoty $L_i = f$ (merané veličiny) alebo hodnoty $L^o = f$ (približné súradnice). V danom prípade je to 2.položka vektora dL s hodnotou $dL_2 = -0,0496 \text{ m}$ (dĺžka medzi bodmi č. 5 a č. 3). Keďže približné súradnice C^o bodov siete boli overené a sú správne, chyba v určení dL_2 môže byť zapríčinená len chybným zameraním príslušnej dĺžky s hodnotou $d(53) = 504,941 \text{ m}$. Túto dĺžku je treba z L eliminovať, vznikne vektor $L_r(15,1)$ a s týmito veličinami vyrovanie príslušnej LGS poskytne správne, prijateľné výsledky.

Správnosť uvedených tvrdení pre demonštrovanú situáciu LGS overuje potom nové, voľné vyrovanie siete (bez vylúčeného prvku $dL_2 = -0,0496$ z vektora dL), t.j. vyrovanie LGS s redukovaným vektorom dL_r pôvodného vektora dL (a s ostatnými redukovanými maticami). V rámci tohoto realizovaného vyrovnania sa získali hodnoty výsledných parametrov LGS :

- $V_r(15,1) [\text{mm}, \text{cc}] = [3,3 \ -1,7 \ -5,3 \ 4,9 \ 0,4 \ 2,2 \ 3,4 \ -1,5 \ -4,7 \ 4,6 \ 6,0 \ 5,6 \ 6,4 \ 2,4 \ -5,8]^T$,
 $KFV_r = 219,766$,
- $s_{o,r} = 5,24$,
- odhady súradníc LGS a ich štandardných odchýlok s použitím dL_r (tab. 7), ktoré hodnoty už jednoznačne preukazujú prijateľnosť príslušných výsledkov.

Tab. 7. Odhady súradníc LGS a ich štandardných odchýlok s použitím dL_r .Tab. 7. Coordinate estimations of LGN and their standard deviations using dL_r .

BOD	\hat{X} [m]	$s(\hat{X})$ [mm]	\hat{Y} [m]	$s(\hat{Y})$ [mm]
1	1239001,119	3,2	264506,301	4,0
3	1239894,221	7,2	263803,981	4,0
8	1239413,397	3,1	264904,553	3,8
5	1239400,503	3,2	263697,862	2,1
7	1239842,529	4,2	264393,244	3,9

Záver

Účelom prezentovaného prípadu vyrovnania LGS s chybným určením (zameraním) niektorých jej určujúcich prvkov (dĺžky, uhly,...) bolo poukázať na identifikáciu chybných meraní s použitím hlavných výsledkov vyrovnania (dL , V , KFV , s_o , \hat{X} , \hat{Y} , $s(\hat{X})$, $s(\hat{Y})$,...), ktoré majú neprijateľné hodnoty. Z výsledkov je evidentné, že chybné namerané veličiny sa primárne výrazne prejavajú s vychýlenými hodnotami v matici L , resp. v $dL = L - L^o$ ako aj v ostatných výstupných veličinách z vyrovnania.

V takých prípadoch treba identifikované chybné veličiny buď znovu zmerať, alebo ich pri dostatočne veľkej redundancii siete $r = n - u$ treba z množiny pôvodne meraných veličín vyradiť a použiť L len s korektnými hodnotami.

Tento príspevok vznikol v rámci riešenia projektu grantovej agentúry VEGA 1/0179/08.

Literatúra - References

- [1] Biacz, Z.: Estimation and hypothesis testing for deformation analysis in special purpose networks. *Univ. Calgary, Canada 1989.*
- [2] Dobeš, J. et al.: Presné lokálne geodetické siete. *VÚGK Bratislava 1990.*
- [3] Ferianc, D.: Geodetické siete 2001 (*Zborník referátov*). *GKU Bratislava 2001.*
- [4] Höpcke, W.: Fehlerlehre und Ausgleichsrechnung. *W.de Gruyter, Berlin 1980*
- [5] Jakub, V., Sabová, J., Weiss, G.: Lokálne geodetické siete I. *Príklady. Edičné stredisko/AMS F BERG TU, Košice 2008, 75 s. ISBN 978-80-553-0022-1.*
- [6] Jakub, V.: Posudzovanie stability geodetických bodov. *DDP práca, F BERG TU Košice 2001.*
- [7] Krajčí, J.: Lokálne geodetické siete. *SAV Bratislava 1963.*
- [8] Nevošád, Z.: Geodézie VI. Vyrovnání geodetických sítí. *VAAZ Brno, 1984.*
- [9] Pelzer, H. (Eds.): Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung, I.(1980), II.(1985) *Wittwer Stuttgart.*
- [10] Suchánek, A. et al.: Geodetické siete, *SvF SVŠT Bratislava 1981.*
- [11] Weiss, G., Šutti, J.: Geodetické lokálne siete I., *TU F BERG Košice, 1997.*
- [12] Wolf, H.: Ausgleichsrechnung I., II. (3.Aufl.), *Dümmler, Bonn 1997.*