

## Grafické testovanie v deformačných šetreniach

Janka Sabová<sup>1</sup> a Silvia Gašincová<sup>1</sup>

### Graphic testing in deformation monitoring

Within deformation monitoring there are often determined horizontal displacements of points situated on the surveyed object. These movements between two epochs expressed by  $\delta p_i = (\delta X^2 + \delta Y^2)^{1/2}$  as stochastic quantities can be tested using a conveniently formulated hypothesis  $H_0$  about significancy behaviour of  $\delta p_i$ .

In the actual case  $H_0$ , expressed the assumption, the time different two positions of a certain point will lie in the area bordered by a time related confidence ellipse. Also, if the displacement vector estimate  $\delta p_i$  will be found inside the ellipse, the corresponding point  $P_i$  can be treated with risk  $\alpha$  as a statistically significant unmoved point, i.e. as stabil point; if  $\delta p_i$  will exceed the ellipse boundary, the test interpretation is opposite.

For a such decide it can be used various numerical tests from the test group of the linear hypothesis of parameters in linear models of estimation theory as e.g. tests of congruency and tests for the detection of outliers. Besides them, there are applicable graphical tests too, before all the "time relative confidence ellipses". Their mathematical background is derived from the tests of congruency. A time related confidence ellipse defines a 2D random space, that with probability (confidence)  $1 - \alpha$  covers the coordinate estimate vector  $\delta p_i$  of the unknown displacement vector (connecting the physical positions of the point  $P_i$ ) between epochs  $t$  and  $t'$ .

In case of various significance level  $\alpha$  (confidence level  $1 - \alpha$ ) one can obtain for the same ellipses with different sizes. Using this testing method it is therefore necessary to introduce for the results  $\delta p_i \in \varepsilon_{ir}$  or  $\delta p_i \notin \varepsilon_{ir}$  the level of the confidence as well.

**Key words:** deformation monitoring, point displacement testing, time relative confidence ellipse

### Úvod

V rámci deformačného monitoringu objektov sa posúdenie ich stability, resp. zmien vykonáva najčastejšie medzi dvomi epochami merania  $t$  a  $t'$ , ktoré predstavujú spravidla susedné epochy. Z výsledkov, t.j. z vyrovnaných súradníc  $C$  a  $C'$  sa vytvorí indikátor veľkosti súradnicovej zmeny každého testovaného bodu  $\delta C = C' - C = [X' - X, Y' - Y]^T = [\delta X, \delta Y]^T$ , pre ktorý sa prijme nulová hypotéza  $H_0: \delta C = 0$ , ktorá sa na určitej hladine významnosti  $\alpha$  testuje. Okrem numerických testov vhodných na overenie  $\delta C$  (testy na overenie lineárnych hypotéz o parametroch v lineárnych modeloch teórie odhadu ako testy kongruentnosti, testy vybočujúcich rezíduí a ďalšie), sú vhodné pre uvedené ciele aj grafické testy, predovšetkým test na overenie  $H_0$  o štatistickej nevýznamnosti 2D vektorov posunov  $\delta p = (\delta X^2 + \delta Y^2)^{1/2}$  jednotlivých testovaných bodov deformačnej siete.

### Grafické testovanie

Z rôznych metód grafických testovaní veličín uvádzame teóriu a prax testovania len 2D premenných, t.j. dvojíc súradníc  $X, Y$  pre polohové vyjadrenie bodov.

Grafické testovanie významnosti zmeny polohy bodu  $P_i$  sa zakladá na vizuálnom porovnaní graficky znázorneného vektora polohovej zmeny bodu  $\delta p_i$  a graficky zobrazenej oblasti konfidencie pre príslušný vektor. Oblasť konfidencie predstavuje v takom prípade relatívna konfidenčná (spol'ahlivostná) elipsa  $\varepsilon_{ir}$  (Grafarend 1972; Niemeier, 1985).

Podstata grafického testovania spočíva teda na geometrických, resp. matematických vzťahoch medzi zobrazenou 2D sieťou s polohovými vektormi zmien (posunov) jednotlivých bodov  $P_i$ , ktorých dĺžky a orientácie (smerníky) sú:

$$|\delta p_i| = \sqrt{\delta X^2 + \delta Y^2}, \quad (1)$$

$$\sigma_{\delta p_i} = \arctg \frac{\delta Y_i}{\delta X_i}, \quad \text{a príslušnými zobrazenými relatívnymi konfidenčnými elipsami } \varepsilon_{ir} \text{ so stredmi v polohách } B_i \text{ (obr.1) alebo } B'_i \text{ (epochy } t \text{ a } t').$$

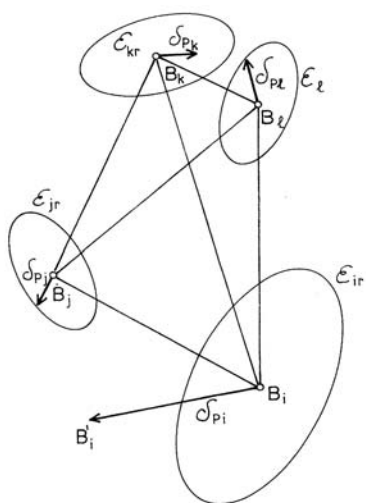
<sup>1</sup> Doc. Dr. Ing. Janka Sabová a, Ing. Silvia Gašincová, Katedra geodézie a geofyziky Fakulty BERG Technickej univerzity v Košiciach, 043 84 Košice, Park Komenského 19 (Recenzované, revidovaná verzia dodaná 14.5.2002)

Testovanie sa vykoná pre každý vektor  $\delta\vec{p}_i$  siete osobitne (lokalizačné testovanie), pre ktorý sa prijme nulová hypotéza

$$H_0 : \delta p_i \in \varepsilon_{ir}, \text{ proti alternatívnej hypotéze } H_a : \delta p_i \notin \varepsilon_{ir},$$

teda  $H_0$  vyjadruje domnienku, že vektor  $\delta\vec{p}_i$  vymedzený polohami  $P_i$  a  $P_i'$  bodu sa umiestni v oblasti vymedzenej relatívnou konfidenciou elipsou.

Testovanou veličinou je teda dĺžka vektora polohovej zmeny bodu  $|\delta\vec{p}_i|$  (je možné testovať aj súradnicové zmeny  $\delta X, \delta Y$  jednotlivo) a ako testovacia štatistika sa použije relatívna konfidencia elipsa  $\varepsilon_{ir}$ , ktorej rovnica sa odvodí z lokalizačnej formy testu kongruentnosti (Heck, 1977; Verö, 1982).



Obr.1 Vektory posunov a zodpovedajúce relatívne konfidencie elipsy

Fig.1 Displacement vectors and corresponding relative confidence ellipses

Testovacie kritérium má tvar

$$T_i = \frac{\delta C_i^T Q_{\delta C_i}^{-1} \delta C_i}{2s_0^2} \sim F(2, n - k + 2) \quad (2)$$

kde jednotlivé veličiny sú určené zo spracovania meraní v epoche  $t$  a  $t'$ . Kritická hodnota  $F$  - rozdelenia pre zvolenú hladinu významnosti testu  $\alpha$  bude

$$F_\alpha = F(\alpha; 2, n - k + 2). \quad (3)$$

Ak má  $H_0$  platiť, musí byť splnená nerovnosť

$$T_i < T_{\alpha}$$

alebo po dosadení z (2) nerovnosť

$$\delta C_i^T Q_{\delta C_i}^{-1} \delta C_i < 2s_0^2 F(\alpha; 2, n - k + 2), \quad (4)$$

resp. po dosadení za  $Q_{\delta C_i}^{-1}$  na základe známych vzťahov  $Q_{\delta C_i}^{-1} = s_0^2 \Sigma_{\delta C_i}^{-1}$ , nerovnosť

$$\delta C_i^T \Sigma_{\delta C_i}^{-1} \delta C_i < 2F(\alpha; 2, n - k + 2). \quad (5)$$

Vzťah (5) predstavuje rovnicu elipsy, ktorá:

- keďže  $\Sigma_{\delta C_i}$  pre bod  $P_i$  ako submatrica kovariačnej matice  $\Sigma_{\delta C}$  popisuje vzájomnú presnosť dvojice polôh (epocha  $t$  a  $t'$ ) bodu  $P_i$ , je relatívnou elipsou,
- keďže veľkosť oblasti, ktorú elipsa vytvára, riadi voľba hladiny významnosti testu  $\alpha$ , resp. hladina konfidencie  $1 - \alpha$ , je konfidenciou elipsou.

Pravdepodobnostný význam  $\varepsilon_{ir}$  tkvie v tom, že s konfidenciou  $1 - \alpha$  v prípade platnosti  $H_0$  pokryje skutočné zmeny súradníc polôh bodu  $P$  v epochách  $t$  a  $t'$ , t.j. aj koncový bod polohového vektora zmeny bodu  $\delta p_i$ .

Vzájomný geometrický vzťah  $\delta p_i$  a  $\varepsilon_{ir}$  určuje výsledok tohoto grafického testu pre každý bod siete s nasledujúcimi dvomi možnosťami:

- ak pri grafickom zobrazení (vo vhodnej mierke) bude vektor  $\delta p_i$  presahovať oblasť ohraničenú elipsou  $\varepsilon_{ir}$ ,  $H_0$  sa s rizikom  $\alpha$  zamietá, t. j. daný vektor bude predstavovať štatisticky významnú polohovú zmenu bodu z polohy  $P_i$  do polohy  $P_i'$  a bod sa prakticky môže (s rizikom  $\alpha$ ) v období  $t' - t$  klasifikovať ako nestabilný,
- ak vektor  $\delta p_i$  bude ležať vnútri oblasti ohraničenej elipsou  $\varepsilon_{ir}$ ,  $H_0$  sa nezamietá, t. j. daný vektor bude predstavovať štatisticky nevýznamnú polohovú zmenu (vyvolanú väčšinou meračskými chybami) bodu,
- z polohy  $P_i$  do polohy  $P_i'$ , teda bod sa prakticky môže v období  $t' - t$  považovať za stabilný.

Hraničné (okrajové) polohy koncového bodu vektora  $\delta \vec{p}$  vzhľadom k  $\varepsilon_{ir}$ , keď koncový bod vektora leží v úzkom vnútornom alebo vonkajšom pásme vzhľadom k obrysu elipsy (obr.1. body  $B_j$ ,  $B_l$ ), z empirického poňatia pohybu a stability môžeme hodnotiť aj ako málo presvedčivé tak pre stabilitu ako aj pre pohyb bodu. Z dvoch možností hodnotenia takého bodu je účelnejšie dať prednosť skôr nestabilnému posudzovaniu.

Všetky tri stavy vzájomného vzťahu  $\delta \vec{p}_i$  a  $\varepsilon_{ri}$  je vhodné v bodovom poli rôznymi vizualizačnými prvkami aj zvýrazniť, aby sa získal dobrý prehľad.

### Konštrukcia relatívnych konfidenčných elips

Relatívne konfidenčné elipsy  $\varepsilon_r$  je možné zostrojiť dvojakým spôsobom.

Pri prvom spôsobe sa použijú obvyklé vzťahy (Böhm, 1990; Wolf, 1996; Pelzer, 1980) pre 3 konštrukčné parametre:  $a$  - dĺžku hlavnej polosi,  $b$  - dĺžku vedľajšej polosi,  $\sigma_a$  - smerník hlavnej polosi, ktoré pre  $\varepsilon_{ri}$  sú

$$\begin{aligned} a_{ir} &= \bar{s}_0^2 (q_{\delta X_i} + q_{\delta Y_i} + w_i) \cdot F(1 - \alpha; 2; n - k), \\ b_{ir} &= \bar{s}_0^2 (q_{\delta X_i} + q_{\delta Y_i} - w_i) \cdot F(1 - \alpha; 2; n - k), \\ \sigma_{air} &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 q_{\delta XY_i}}{q_{\delta X_i} - q_{\delta Y_i}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Vo vzťahoch (6)

$$w_i = \sqrt{(q_{\delta X_i} - q_{\delta Y_i})^2 + 2(q_{\delta XY_i})^2},$$

Hodnoty kofaktorov  $q$  sa získajú z príslušnej  $i$ -tej submatice  $Q_{\delta C_i}$  kofaktorovej matice súradnicových diferencii

$$Q_{\delta \vec{e}} = Q_{\vec{e}} + Q_{\vec{e}'} = \begin{bmatrix} Q_{\delta \vec{e}_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & Q_{\delta \vec{e}_i} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$Q_{\delta \vec{e}_i} = \begin{bmatrix} q_{\delta X_i} & q_{\delta XY_i} \\ q_{\delta YX_i} & q_{\delta Y_i} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

pričom  $Q_{\vec{e}}$ ,  $Q_{\vec{e}'}$  kofaktorové matice vyrovnaných súradníc v epochách  $t$  a  $t'$  získané z vyrovnania siete,

$$\bar{s}_0^2 = \frac{v^T Q_L^{-1} v + (v'^T Q_L^{-1} v')}{(n+k) + (n+k)'}, \quad (9)$$

kde  $v^T Q_L^{-1} v + (v'^T Q_L^{-1} v')$  sú kvadratické formy opráv,  $n$  a  $n'$  sú počty meraných veličín,  $k$  a  $k'$  sú počty súradníc v epochách  $t$  a  $t'$  a  $F(1 - \alpha; 2, n - k)$  je kritická hodnota Fischerovho rozdelenia, pre príslušné  $\alpha$  (napr. 0,01, 0,05 ...).

Pri druhom spôsobe sa na výpočet konštrukčných parametrov použijú vzťahy (Grafarend, 1972; Heck, 1977; Niemeier, 1985)

$$\begin{aligned} a^2_{ir} &= 2\bar{s}_0^2 \lambda_{1ir} F(1-\alpha; 2, n-k), \\ b^2_{ir} &= 2\bar{s}_0^2 \lambda_{2ir} F(1-\alpha; 2, n-k), \\ \sigma_{ir} &= \arctg(m_{21}/m_{11}), \end{aligned} \quad (10)$$

pre ktoré sa potrebné veličiny získajú spektrálnym rozkladom matice  $Q_{\delta\hat{e}_i}$ . Dekompozíciou matice sa určí

$$\text{matica charakteristických čísel} \quad \Lambda_{ir} = \begin{bmatrix} \lambda_{1ir} & 0 \\ 0 & \lambda_{2ir} \end{bmatrix} \quad (11)$$

a

$$\text{matica charakteristických vektorov} \quad M_{ir} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Podľa voľby  $\alpha$ , dostávame rôzne veľké elipsy presnosti s rôznou konfidenciou, napr. pri  $\alpha = 0,05$  vzniká  $1-\alpha = 0,95$  konfidenčná relatívna elipsa presnosti, pri  $\alpha = 61\%$  vzniká  $1-\alpha = 39\%$ -ná konfidenčná elipsa (štandardná elipsa presnosti) na pravdepodobnostnej úrovni štandardných odchýliek.

### Záver

Na testovanie stability objektových bodov v rámci deformačného šetrenia je možné (aj s vizuálnym posúdením výsledkov a prehľadom) použiť aj časovo relatívne konfidenčné elipsy. Tieto s konfidenciou  $1-\alpha$  vymedzujú 2D oblasť v tvare elipsy, ktorú:

1. ak vektor  $\delta\hat{p}_i$  neprekročí,  $H_0$  sa nezamieta, t.j. príslušný bod je možné považovať v období  $t'-t$  za stabilný, s rizikom  $\alpha$ ,
  2. ak vektor  $\delta\hat{p}_i$  prekročí,  $H_0$  sa neprijíma, t.j. bod je možné považovať za štatisticky významne posunutý.
- Výsledky grafického testovania sú identické s výsledkami príslušných numerických testov.

### Literatúra

- BÖHM, J. et. al.: Teorie chyb a vyrovnávací počet. Geodetický a kartografický podnik, Praha, 1990.
- GRAFAREND, W.E.: Genauigkeitsmasse geodätischer Netzte. Veröff.d. Deutschen Geodät. Komm. R.A, H. 73, München, 1972.
- HECK, B. et. al.: Deformationsanalyse mittels relativer Fehlerellipsen. Allgem. Verm. Nachrichten, 84 (1977), 2, s. 78 – 87.
- NIEMEIER, W.: Netzqualität und Optimierung. In: Pelzer, H. (Hrsg.): Geodät. Netze in Landes – und Ingenieurvermessung II., K. Wittwer, Stuttgart 1985, s. 153 – 224.
- PELZER, H. (Hrsg.): Geodät. Netze in Landes – und Ingenieurvermessung I. K. Wittwer, Stuttgart, 1980.
- VERŐ és HETÉNYI, M.: Vízszintes elmozdulások kimutatása relatív hibaellipszisek segítségével. Geodézia és kartográfia, 1982, 5, s. 276 – 285.
- WOLF, H.: Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Dümmler, Bonn, 1996.