

## Topografické a izostatické zložky zvislicových odchýlok

Vladimír Sedlák<sup>1</sup>

### Topographic and isostatic elements of verticals

In the paper the determination of topographic and isostatic redress surface influence on verticals in mountain regions is presented. Relative verticals, i.e. verticals determined on the base of astronomical and geodetic measurements, are a subject of solution. The graphic method according to J.R. Clarke for determining topographic elements (corrections) of verticals is presented. The Clarke graphic method goes out from the Newton gravitational law. This method operates with a simple topographic map and a constructed sculptured glass of sectors of sphere. Numerical procedures for the calculation of isostatic elements of verticals are based on several hypotheses (theories) about hydrostatic balance (isostatic redress) of mass in the earth crust: the Pratt hypothesis, Airy hypothesis, Hayford hypothesis and the Heiskanen hypothesis. Their hypotheses have been confirmed as theories.

The presented graphic and numerical procedures in solving topographic and isostatic elements of relative verticals were applied to a model mountain conditions in the Čermel' valley nearby Košice. Six points at a various height were chosen on the south slope of this valley. A topographic map in the scale 1:10000 was used to determine the topographic elements of verticals. The sculpture glass of sectors of sphere following out from the theoretical procedure according to J.R. Clarke was produced. The simple software was developed to numerically solve both vertical elements, i.e. the topographic and isostatic elements.

The tables in this paper give a review of the reached results in the determined topographic and isostatic elements of verticals. The values of these elements do not exceed 20" what is a maximum value for verticals in our geographical latitudes and longitudes. The presented problem of estimating of verticals is of significance in many adjustments of geodetic networks where verticals have an sizeable influence on the geodetic network accuracy.

**Key words:** relative verticals, astronomical and geodetic measurements, meridian and traverse vertical elements, topographic correction, correction from isostatic redress surface.

### Úvod

V horských a vysokohorských oblastiach, kde v rámci rôznych geodetických meraní pri strmých zámerách majú relatívne (astronomicko-geodetické) zvislicové (ťažnicové) odchýlky značný vplyv na presnosť geodetických meraní, môžu spôsobiť systematické chyby v dôsledku takýchto zámer rádo aj niekoľko centimetrov na kilometer. Z tohoto dôvodu môže byť polohová presnosť bodov geodetickej siete v takomto prostredí určená s nižšou presnosťou, než sa od siete požaduje (napr. pri sledovaní geotektonických pohybov, trigonometrickom určovaní výšok a pod.). S cieľom správne vypočítať 3D súradnice geodetickej siete v horskom a vysokohorskom prostredí je potrebné observované geodetické dáta redukovať na používaný referenčný elipsoid. Na území bývalého Česko-Slovenska hodnoty relatívnych zvislicových odchýlok v S-JTSK nepresahujú hodnotu 20".

Zvislicové odchýlky môžeme určiť z astronomických a geodetických meraní, kedy hovoríme o astronomicko-geodetických zvislicových odchýlkach  $\Theta^a$ , ktoré sa tiež nazývajú relatívne zvislicové odchýlky. Zvislicové odchýlky, ktoré určíme z gravimetrických meraní (z anomálií tiaže), sú gravimetrické zvislicové odchýlky  $\Theta^{gr}$ , ktoré sa tiež nazývajú absolútne zvislicové odchýlky. Pre práce v určitom geodetickom systéme sa tieto gravimetrické (absolútne) zvislicové odchýlky musia pretransformovať na astronomicko-geodetické (relatívne) zvislicové odchýlky.

### Teoretické základy zvislicových odchýlok

Významnú prácu v oblasti relatívnych zvislicových odchýlok vykonal najmä P.S. Laplace. Jeho vzťahy pre určenie jednotlivých zložiek zvislicových odchýlok ako i vzťah pre určenie geodetického azimutu majú platnosť v spracovaní geodetických bodových sietí a riešení geodetických úloh v mnohých prípadoch teoretickej i praktickej geodézie (Vykuťil, 1982; Mojzeš, 1997; Sedlák, 1999a, 2002).

Pre redukované (transformované) geodetické prvky na referenčnom elipsoide, pre smery  $\bar{s}_{ij}$  pre určenie horizontálnych uhlov, pre zenitové uhly  $\bar{z}_{ij}$  a vzdialenosti  $\bar{d}_{ij}$  medzi bodmi  $P_i$  a  $P_j$  platia známe vzťahy (Vykuťil, 1982; Hradilek, 1984; Gerstbach, 1986; Sedlák, 1997, 1999b):

$$\bar{s}_{ij} = s_{ij} + (\xi_i \sin \alpha_{ij} - \eta_i \cos \alpha_{ij}) \cotg z_{ij}, \quad (1)$$

<sup>1</sup> Doc. Ing. Vladimír Sedlák, PhD., Katedra geodézie a geofyziky, Fakulta BERG Technickej univerzity v Košiciach, Park Komenského 19, 043 84 Košice  
(Recenzované a revidovaná verzia dodaná 25.6.2002)

$$\bar{z}_{ij} = z_{ij} + (\xi_i \sin \alpha_{ij} + \eta_i \cos \alpha_{ij}) \cotg z_{ij} + k \quad (2)$$

$$\bar{d}_{ij} \cong d_{ij} \left( \sin \bar{z}_{ij} + \sin z_{ij} \right) \frac{R_o}{2R_o + h_i + h_j}, \quad (3)$$

kde:  $s_{ij}, z_{ij}, d_{ij}$  sú neredukované smery, zenitové uhly a vzdialenosti z bodu  $P_i$  na bod  $P_j$ ,  
 $\xi_i, \eta_i$  sú meridiánová (pozdĺžna) a transversálna (pričná) zložka zvislicovej odchýlky  $\Theta$  na stanovisku  $P_i$ ,  
 $\alpha_{ij}$  je geodetický azimut z bodu  $P_i$  na bod  $P_j$ ,  
 $R_o$  je stredný polomer Zeme (pre naše zemepisné šírky  $R_o = 6\,380\,703,611$  m),  
 $k$  je koeficient vertikálnej refrakcie,  
 $h_i, h_j$  sú elipsoidické (geodetické) výšky bodov  $P_i$  a  $P_j$ .

Pre mnohé geodetické siete lokálneho charakteru je dôležitá iba lokálna časť zložiek  $\xi$  a  $\eta$  relatívnych zvislicových odchýlok (ďalej len zvislicových odchýlok). Regionálna časť takýchto zvislicových odchýlok je v rozsahom malých územiach (napr. v časti horského a vysokohorského prostredia) takmer konštantná a môže byť v prípade potreby zohľadnená vyrovnaním a transformáciou celej siete. Prezentovaná grafická metóda určovania zložiek zvislicových odchýlok z topografie reliéfu horského a vysokohorského prostredia veľmi jednoducho umožňuje stanoviť takéto zložky s použitím jednoduchých topografických máp. Maximálna hodnota zvislicovej odchýlky  $\Theta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$  sa podľa teoretických predpokladov môže očakávať v blízkosti stredy medzi údolím a hrebeňom pohoria a závisí od absolútnej hodnoty relatívneho prevýšenia  $H$  hrebeňa nad údolím (Gerstbach 1984, Sedlák 2002). Pre horské a vysokohorské územia, ku ktorým patria u nás Vysoké Tatry, kde  $H$  je približne 2000 až 2500 m, môžeme predpokladať, že maximálna hodnota zvislicovej odchýlky  $\Theta_{max}$  je približne 20", pričom sklon zámer je v rozsahu 10° až 30° (z geodetickej praxe je známe, že strmšie sklony zámer sú v geodetických sieťach zriedkavé). Preto korekcie smerov a vzdialeností vo vzťahoch (1) a (3) budú dosahovať hodnoty 12" a 50 ppm, čo je 10-násobne viac ako presnosť merania.

### Topografické a izostatické zložky zvislicových odchýlok

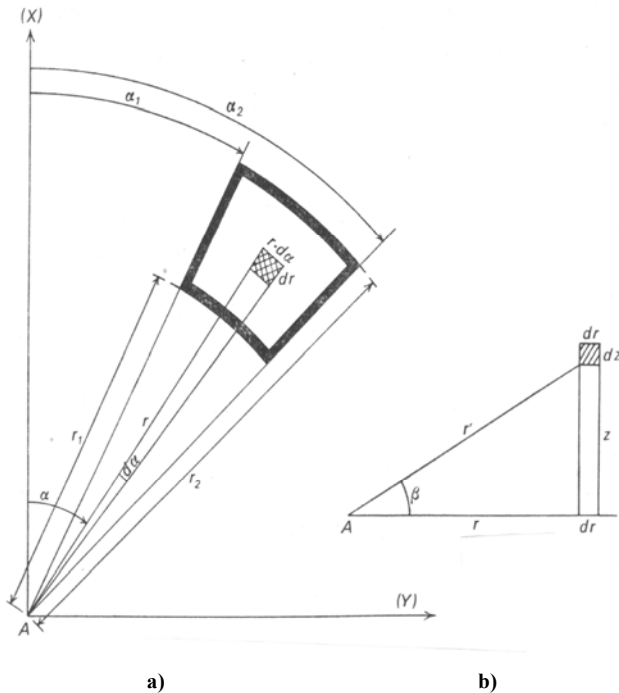
Ak poznáme zvislicové odchýlky  $\Theta$  a ich azimuty  $\alpha$ , môžeme ich na jednotlivých bodoch zakresliť do mapy ako rovinné vektory (Vykuťil 1982). Z mapy zistíme, že tieto vektory sú ovplyvnené hlavne blízkymi horskými masívmi. Príťažlivá sila „topografických hmôt“ sa prejaví odklonom zvislice, ktorý je možné (za určitých podmienok) vypočítať. Takto vypočítané „topografické“ odchýlky (korekcie) zvislice sú však omnoho väčšie než relatívne odchýlky, ktoré sú určené z astronomických a geodetických údajov. Rozdiely medzi nameranými a vypočítanými hodnotami odchýlok sa snaží objasniť teória izostatickej kompenzácie. Ak sa opraví zvislicové odchýlky o topografické a izostatické korekcie, odstraňuje sa určitým spôsobom vplyv zemskej kôry a v tomto prípade ide o jednu z metód tzv. regularizácie Zeme.

Dnes sa problematika izostatickej kompenzácie nepovažuje za hypotézu ale za teóriu, potvrdenú praktickými výsledkami. Izostatické korekcie topografických zvislicových odchýlok prinášajú zlepšenie na územiach, ktoré sú v izostatickej rovnováhe. Existujú aj také časti zemskej kôry, ktoré sú podkompenzované alebo prekompenzované. Teória izostatickej kompenzácie neprihliada na nerovnomerné rozloženie hustoty hmôt v zemskej kôre.

### Topografická zložka

Ak počítame topografickú zložku (korekciu) zvislicových odchýlok, zisťujeme tým vlastne vplyv topografického reliéfu na smer tiaže pozdĺž zvislice. Do úvahy sa pritom berú hmoty nachádzajúce sa nad geoidom (pohoria) i pod geoidom (morské hlbiny) a to do istej vzdialenosti (1000 km) od uvažovaného bodu. Vplyv hmôt za touto vzdialenosťou sa počíta súhrnne, alebo sa zanedbáva. Výpočtový postup pre určenie topografickej korekcie zvislicových odchýlok navrhol *J.R. Clarke* v roku 1880 (Vykuťil, 1982).

Okolo bodu, pre ktorý chceme určiť topografickú zložku (korekciu) zvislicovej odchýlky, vedíme sústredné vertikálne valce rôznych polomerov, ktoré vhodne volíme. Takto sa územie rozdelí na valcovité zóny (napr. až do vzdialenosti 1000 km). Zóny sa ďalej rozdelia vertikálnymi rovinami, ktoré prechádzajú uvažovaným bodom. Takto sa topografické hmoty v okolí tohto bodu rozdelia do jednotlivých sektorov (stĺpcov). Pre praktický výpočet sa použije priesvitka, na ktorej sú nakreslené sústredné kružnice a radiálne lúče (v mierke vhodnej mapy). Kružnice aj radiálne lúče sú vykreslené v príslušnej mierke. Priesvitka sa priloží na výškopisnú mapu a orientuje sa na sever. V každom sektore, ktorý je ohraničený dvoma susednými kružnicami



Obr.1. Pôdorys sektora ohraničeného valcovými plochami s polomerami  $r_1, r_2$  a zvislými rovinami s azimutmi  $\alpha_1, \alpha_2$ ; pôdorys -a), nárys -b).

Fig.1. Section-plan of the sector limited by cylinder surfaces with radiuses  $r_1, r_2$  and vertical planes with azimuths  $\alpha_1, \alpha_2$ ; section plan -a), projection -b).

tačného zákona (Vykuřil, 1982)

$$dp = \chi \frac{dm}{(r')^2} = \chi \rho \frac{r \, d\alpha \, dr \, dz}{(r')^2}, \quad (6)$$

kde:  $\chi = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$  je gravitačná konštanta.

Pre šikmú vzdialenosť  $r'$  platí

$$r' = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad \cos \beta = \frac{r}{r'}. \quad (7)$$

Horizontálna zložka elementárnej príťažlivej sily je rovná

$$dp \cos \beta = dp \frac{r}{r'} = dp \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \chi \rho \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} d\alpha \, dr \, dz. \quad (8)$$

Priemety tejto zložky do osi  $X$  a  $Y$  majú tvar

$$dX = \chi \rho \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \cos \alpha \, d\alpha \, dr \, dz, \quad dY = \chi \rho \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \sin \alpha \, d\alpha \, dr \, dz. \quad (9)$$

Pre zložky príťažlivej sily stĺpca (sektora), vymedzeného polomerami  $r_1$  a  $r_2$  a rovinami s azimutmi  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$  (pri strednej výške terénu  $H$  v stĺpci), platia vzťahy

$$X = \chi \rho \iiint_{\alpha_1, r_1, 0}^{\alpha_2, r_2, h} \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \cos \alpha \, d\alpha \, dr \, dz, \quad Y = \chi \rho \iiint_{\alpha_1, r_1, 0}^{\alpha_2, r_2, h} \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \sin \alpha \, d\alpha \, dr \, dz. \quad (10)$$

Postupnou integráciou a úpravou vzťahov (10) dostaneme pre zložky príťažlivej sily v meridiáne (os  $X$ ) a v I. vertikále (os  $Y$ ) hodnoty

$$X = \chi \rho (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \ln \frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 + H^2}}{r_1 + \sqrt{r_1^2 + H^2}}, \quad Y = \chi \rho (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \ln \frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 + H^2}}{r_1 + \sqrt{r_1^2 + H^2}}. \quad (11)$$

a radiálnymi lúčmi, sa určí stredná nadmorská výška, vypočíta sa vplyv jednotlivých sektorov a algebraickým súčtom sa určí celkový vplyv všetkých sektorov na zvislicovú odchýlku. Na obr.1 je zobrazený pôdorys jedného sektora. Ten je ohraničený valcovými plochami s polomerami  $r_1$  a  $r_2$  a zvislými rovinami s azimutmi  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$ .

Uvažujme objemový element s rozmermi  $dr$ ,  $r \, da$  a  $dz$  vo vodorovnej vzdialenosti  $r$  od bodu  $A$ , v ktorom zisťujeme topografické zložky (korekcie) zvislicových odchýlok a vo výške  $z$  nad jeho horizontom. Objemový element  $dV$  je potom vyjadrený

$$dV = r \, da \, dr \, dz. \quad (4)$$

Hmotnosť  $dm$  tohto objemového elementu  $dV$  s hustotou  $\rho$  bude

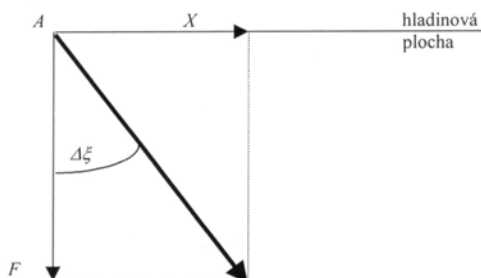
$$dm = \rho \, r \, da \, dr \, dz. \quad (5)$$

Element hmotnosti  $dm$  pôsobí v šikmej vzdialenosti  $r'$  na bod  $A$  elementárnou príťažlivou silou  $dp$ , vyjadrenou podľa Newtonovho gravi-

Na jednotku hmotnosti v bode  $A$  pôsobí príťažlivou silou  $F$  aj celá Zem

$$F = \chi \frac{M}{R^2} = \chi \frac{\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_s}{R^2} = \chi \frac{4}{3} \pi R \rho_s, \quad (12)$$

kde:  $\rho_s$  je stredná hustota Zeme.



Obr.2. Meridiánový rez – meridiánová topografická zložka (korekcia) zvislicovej odchýlky.

Fig.2. Meridian section – meridian topographic element (correction) of vertical.

Podľa obr.2, ktorý znázorňuje rez v meridiánovej rovine, budú meridiánová  $\Delta\xi$  a priečna  $\Delta\eta$  topografická zložka (korekcia) zvislicovej odchýlky vyjadrené vzťahom

$$\Delta\xi = \arctg \frac{X}{F}, \quad \Delta\eta = \arctg \frac{Y}{F}. \quad (13)$$

Ak dosadíme do vzťahov (13) za  $X$  a  $Y$  zo vzťahov (11) a za  $F$  zo vzťahu (12), získame pre topografické zložky (korekcie) hodnoty  $\Delta\xi$ ,  $\Delta\eta$ , vyjadrené nasledujúcimi vzťahmi [odmocniny v zlomkoch vzťahov (11) sa obvykle zanedbávajú]

$$\Delta\xi'' = \text{rad}'' \frac{3}{4\pi R} \frac{\rho}{\rho_s} H(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad \Delta\eta'' = \text{rad}'' \frac{3}{4\pi R} \frac{\rho}{\rho_s} H(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (14)$$

Tieto vzťahy môžeme napísať aj pre ľubovoľný stĺpec, ktorý je ohraničený polomerami  $r_{k-1}$  a  $r_k$  a rovinami s azimutmi  $\alpha_{n-1}$  a  $\alpha_n$

$$\Delta\xi'' = \text{rad}'' \frac{3}{4\pi R} \frac{\rho}{\rho_s} H(\sin \alpha_n - \sin \alpha_{n-1}) \ln \frac{r_k}{r_{k-1}}, \quad \Delta\eta'' = \text{rad}'' \frac{3}{4\pi R} \frac{\rho}{\rho_s} H(\cos \alpha_{n-1} - \cos \alpha_n) \ln \frac{r_k}{r_{k-1}}. \quad (15)$$

Vzhľadom na uľahčenie výpočtu volia sa nasledovné hodnoty vstupných konštantných hodnôt:

- stredná hustota zemskej kôry:  $\rho = 2,73 \text{ g.cm}^{-3}$ ,
- stredná hustota Zeme:  $\rho_s = 5,52 \text{ g.cm}^{-3}$ ,
- polomer Zeme:  $R = 6\,371,10^3 \text{ m}$ ,
- gravitačná konštanta:  $\chi = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ ,
- $\text{rad}'' \frac{3}{4\pi R} \frac{\rho}{\rho_s} = 0,0038225''/\text{m}$ .

Výpočty sa ďalej zjednodušia, ak zvolíme pre konštrukciu priesvitky všetky rozdiely  $(\sin \alpha_n - \sin \alpha_{n-1}) = K$  konštantné a konštantný pomer  $r_k/r_{k-1} = L$ . Napr. *Th.Niethammer* („Déviations de la verticale et isostasie“, Bern, 1925) volil  $(\sin \alpha_n - \sin \alpha_{n-1}) = 1/8 = 0,125$ . Pri tejto voľbe konštanty  $K$  rozdeľujú radiálne papršky kvadrant na 8 nerovnakých výsekov. Hodnotu  $r_k/r_{k-1}$  môžeme voliť tak, aby pre jeden meter výšky bol účinok v každom stĺpci rovnaký a rovný napr. hodnote  $0,0001''$  (Vykutil, 1982). Podľa *Th.Niethammera* pomer  $r_k/r_{k-1} = 1,2328$ , a teda  $\ln(r_k/r_{k-1}) = 0,209288$ . Vzťah pre meridiánovú topografickú zložku (korekciu) sa tým zjednoduší na tvar (Vykutil 1982)

$$\Delta\xi'' = 0,0038225 \cdot 0,125 \ln \frac{r_k}{r_{k-1}} H. \quad (16)$$

Pri uvedenej voľbe konštant  $K$  a  $L$  ( $L = r_k/r_{k-1}$ ) a pri použití odpovedajúcej priesvitky bude mať prvý zo vzťahov (15) tvar

$$\Delta\xi'' = 0,0001'' H_{(m)} \quad (17)$$

a výpočet sa obmedzí prakticky len na výpočet strednej výšky  $H$  v stĺpcoch.

Celkový účinok topografických hmôt na meridiánovú zložku zvislicovej odchýlky zistíme tak, že stred priesvitky, zostrojenej v príslušnej mierke mapy, priložíme na bod  $A$ , pre ktorý určujeme topografickú zložku (korekciu) a priesvitku orientujeme smerom  $\alpha = 0^\circ$  do meridiánu. Určíme strednú výšku  $H$  vo všetkých

sektoroch. Ak označíme súčet stredných výšok v sektoroch ležiacich na sever od bodu  $A \Sigma H_N$  a na juh  $\Sigma H_S$ , bude celková „topografická zložka“ („topografická korekcia“)

$$\Delta \xi_i'' = 0,0001'' (\Sigma H_N - \Sigma H_S). \quad (18)$$

Pre priečnu topografickú zložku (korekciu)  $\Delta \eta_i$  je  $\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 = -(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$ . Priesvitka je v tomto prípade otočená o  $90^\circ$ , t.j. smer  $\alpha = 0^\circ$  sa stotožní so smerom východ–západ. Ak označíme súčet stredných výšok v sektoroch na východ od bodu  $A$  symbolom  $\Sigma H_E$  a na západ  $\Sigma H_W$ , bude pre priečnu zložku (korekciu) platiť vzťah

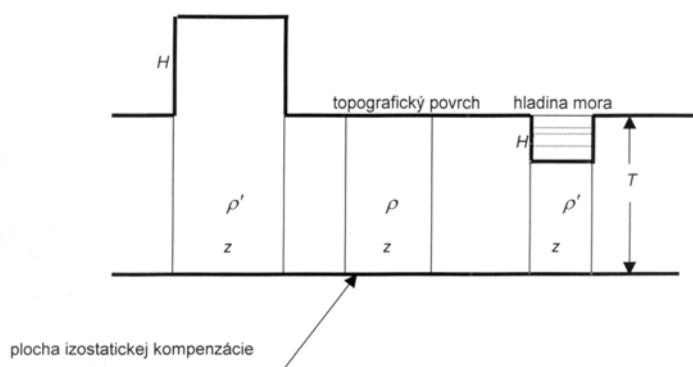
$$\Delta \eta_i'' = 0,0001'' (\Sigma H_E - \Sigma H_W). \quad (19)$$

V najbližšom okolí bodu  $A$  sa nedá zanedbať výška  $H$ , t.j. nedá sa zanedbať sklon spojnic bodu  $A$  s bodmi topografického povrchu (nedá sa zameniť dĺžka  $r$  a  $r'$ ). Ak opíšeme okolo bodu  $A$  kružnicu s vhodným polomerom, ohraničíme tak hmotný plný valec pod týmto bodom  $A$  s jeho výškou  $H_A$ . Pretože hmotný valec je teleso symetrické, nevyvolá žiadnu odchýlku zvislice v bode  $A$ . U vzdialenejších zón od bodu  $A$  (nad 600 km) sa berie ohľad na zakrivenie Zeme (namiesto dĺžok polomerov  $r$  sa vzdialenosti vyjadrujú stredovými uhlami pre Zem ako guľu). Príslušné vzťahy odvodil *J.R. Clarke*. V sektoroch, ktoré padnú do morských a oceánskych oblastí, je nutné prihliadať k menšej hustote vody  $\rho = 1,03 \text{ g.cm}^{-3}$ , ako majú pevniny ( $\rho = 2,73 \text{ g.cm}^{-3}$ ).

### Izostatická zložka

Hodnoty relatívnych zvislicových odchýlok, i napriek tomu, že sú korigované o vplyv topografického reliéfu, sú omnoho väčšie než odpovedajúce hodnoty, určené z astronomických a geodetických meraní. *J.F. Hayford* vypočítal pre bod *St. Barbara* v Kalifornii  $\xi = -65''$ , pričom z astronomických a geodetických meraní vyšla hodnota iba  $\xi = -18''$ . Na základe týchto skutočností sa dospelo k záveru, že vplyv hmôt, nahromadených na zemskom povrchu, je nejakou príčinou zoslabovaný. Vysvetlenie tohoto javu podal ako prvý *J.H. Pratt*, ktorý v Himalájách zistil aj prekvapivo malé hodnoty astronomicko–geodetických zvislicových odchýlok oproti gravimetrickým (Vykuřil 1982; Ochaba 1986).

**Prattova hypotéza** predpokladá v určitej hĺbke pod morskou hladinou taký istý tlak, ako je tlak vonkajších vrstiev zemského telesa. Táto podmienka bude splnená, ak vertikálne stĺpce s rovnakými základňami  $z$  s medziplochou rovnakého tlaku (izostatickou plochou) a fyzickým zemským povrchom budú mať rovnakú hmotnosť. Pre zjednodušenie sa neprihliada na rozdielne hustoty, zapríčinené vplyvom zmien tiažového zrýchlenia so zemepisnou šírkou a nadmorskou výškou. Vyššie stĺpce majú menší objem a musia teda mať i menšiu hustotu než nižšie stĺpce.



Obr.3. Prattova hypotéza.  
Fig.3. Pratt hypothesis.

Potom pre tzv. hypotézu izostatickej kompenzácie platí podmienka: Hustota hmôt nad plochou izostatickej kompenzácie (rovnováhy) musí byť nepriamo úmerná výške stĺpca, čo znamená, že rozdiely v objemoch stĺpcov sa kompenzujú odpovedajúcimi rozdielmi hustoty obr.3. Ak nadmorskú výšku pevninových stĺpcov označíme  $H$  a ich hustotu  $\rho'$  a strednú hustotu zemskéj kôry  $\rho$ , musí platiť nasledujúci vzťah (Vykuřil, 1982; Ochaba, 1986)

$$\rho T = (T + H) \rho'. \quad (20)$$

Z daného vzťahu pre hustotu pevninových stĺpcov vyplýva

$$\rho' = \frac{T}{T + H} \rho. \quad (21)$$

Kompenzačný úbytok hustoty  $\Delta \rho$  je daný vzťahom

$$\Delta \rho = \rho' - \rho = \frac{T}{T + H} \rho - \rho = -\frac{H}{T + H} \rho. \quad (22)$$

Môžeme teda napísať

$$\rho' = \rho + \Delta\rho, \quad (23)$$

kde záporné znamienko hodnoty vo vzťahu (22) vyjadruje, že s kladnou výškou  $H$  nastáva úbytok hustoty.

Pre prírastok hustoty pre morské hĺbky  $H'$  dostávame obdobný vzťah (Vykutil 1982, Ochaba 1986)

$$\Delta\rho' = + \frac{H'}{T - H'} (\rho - \rho_v), \quad (24)$$

kde:  $\rho_v = 1,03 \text{ g.cm}^{-3}$ , je hustota morskej vody.

Vychádzajme z pracovnej hypotézy, ktorú prijal švajčiarsky geodet **C.F.Baesclin** a ktorá tvrdí, že kontinentálne hmoty nad geoidom majú rovnakú hustotu  $\rho$  a tiež, že izostatická kompenzácia začína až na geoide a ide do hĺbky  $T$ .

Podľa tohto predpokladu musí platiť nasledujúci vzťah (Vykutil 1982, Ochaba 1986)

$$\rho H = -T \Delta\rho. \quad (25)$$

Pre úbytok hustoty potom platí

$$\Delta\rho = - \frac{H}{T} \rho. \quad (26)$$

Vzťahy pre zmeny  $\Delta\xi_c, \Delta\eta_c$  v odchýlke zvislice, vyvolané úbytkom alebo prírastkom hustoty podľa teórie izostatickej kompenzácie, odvodíme z východiskových vzťahov (9) tak, že namiesto hodnoty  $\rho$  dosadíme  $\Delta\rho$  zo vzťahu (26). Vzťah pre výpočet meridiánovej zložky (korekcie) zvislicovej odchýlky z izostatickej kompenzácie po integrácii bude

$$\Delta\xi_c'' = -\text{rad}'' \frac{3}{4\pi R} \frac{\Delta\rho}{\rho_s} H (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \ln \frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 + T^2}}{r_1 + \sqrt{r_1^2 + T^2}}. \quad (27)$$

Pre súčet vplyvu topografických hmôt a izostatickej kompenzácie  $\Delta\xi_{t+c}''$  platí

$$\Delta\xi_{t+c}'' = \Delta\xi_t'' + \Delta\xi_c''. \quad (28)$$

Vzťah (28) napíšme v tvare

$$\Delta\xi_{t+c}'' = \Delta\xi_t'' \left( 1 + \frac{\Delta\xi_c''}{\Delta\xi_t''} \right) = F \Delta\xi_t'', \quad (29)$$

kde:  $F$  je tzv. „izostatický redukčný faktor“, ktorý vypočítame podľa vzťahu

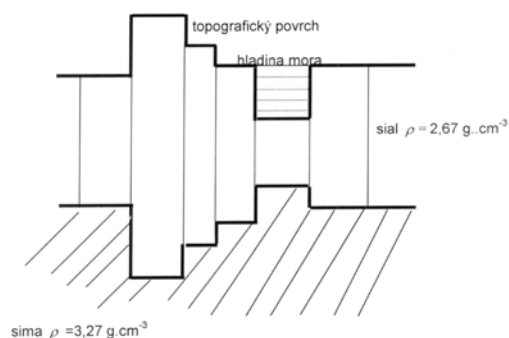
$$F = 1 + \frac{\Delta\xi_c''}{\Delta\xi_t''} = 1 - \frac{\ln \frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 + T^2}}{r_1 + \sqrt{r_1^2 + T^2}}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (30)$$

Vzťah pre vyjadrenie priečnej zložky (korekcie) zvislicovej odchýlky o izostatickú kompenzáciu získame obdobne ako u meridiánovej zložky

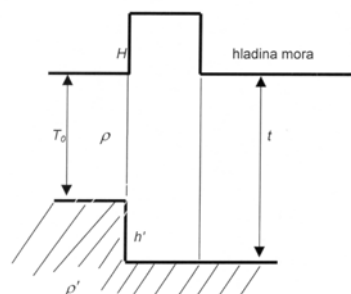
$$\Delta\eta_{t+c}'' = F \Delta\eta_t''. \quad (31)$$

S cieľom získať hodnoty izostaticky redukovaných zložiek zvislicových odchýlok, musíme odčítať od zložiek zvislicových odchýlok, získaných z astronomicko-geodetických údajov, hodnoty  $\Delta\xi_{t+c}''$ , resp.  $\Delta\eta_{t+c}''$ , t.j., odčítať vplyv izostaticky kompenzovaných hmôt. Zo vzťahu (30) je zrejmé, že izostatický redukčný faktor je funkciou polomerov  $r_1$  a  $r_2$  každej zóny a kompenzačnej hĺbky  $T$ . Hodnota  $F$  je teda pre všetky sektory tej istej zóny rovnaká a je možno ju tabelovať pre každú zónu a rôznu kompenzačnú hĺbku. **J.F.Hayford** volil pre svoje tabuľky hodnoty hĺbok  $H=113,7 \text{ km}$ ,  $120,9 \text{ km}$ ,  $162,2 \text{ km}$ . Neskôr sa ukázalo, že kompenzačná hĺbka je omnoho menšia, než určil **J.F.Hayford**.

Rovnako ako *J.H.Pratt*, vytvoril aj **G.B.Airy** inú hypotézu izostatickej kompenzácie. Predpokladal, že vrchné časti zemského telesa plávajú ako kryhy na hustejšom podklade (je to obdoba ľadových kryh plávajúcich v mori). Kde sú vyššie hory, kryhy sú zaborené hlbšie a naopak, kde sú nižšie hory, kryhy sú zaborené plytšie. Schematická situácia *Airyho hypotézy* je na obr.4. Názov *sial* vznikol zo známych geologických skutočností, že vrchné časti zemského telesa sú zložené prevažne z oxidu kremíka (Si) a hliníka (Al). Magmatické podložie je zasa zložené z kysličníka kremíka (Si) a horčíka (Mg). Odtiaľ názov *sima* (Ochaba, 1986).



Obr.4. *Airyho hypotéza.*  
Fig.4. *Airy hypothesis.*



Obr.5. *Heiskanenova hypotéza.*  
Fig.5. *Heiskanen hypothesis.*

Fínsky geodet **W.A.Heiskanen** („Tables isostatiques...“, Bull. Géod. 1931) prisúdil povrchovým vrstvám hustotu  $\rho = 2,67 \text{ g.cm}^{-3}$  a podložíu hustotu  $\rho = 3,27 \text{ g.cm}^{-3}$  (obr.5). Miesto konštantnej kompenzačnej hĺbky  $T$  v *Prattovej* teórii bude podľa *G.B.Airyho* hĺbka kompenzácie  $t$  funkciou nadmorskej výšky  $H$ . Je to vlastne hrúbka (mocnosť) vrstvy sialu medzi hladinou mora (geoidom) a simou. Pre  $H = 0$  položíme  $t = T_0$  (Vykutíl, 1982; Ochaba, 1986). Z obr.5 je zrejmé, že pre pevniny bude podľa zákona o vztlaku platiť

$$\rho H = (\rho' - \rho)(t - T_0) = (\rho' - \rho)h' . \quad (32)$$

Zo vzťahu (32) môžeme určiť

$$h' = \frac{\rho}{\rho' - \rho} H = \frac{2,67}{0,60} H = 4,45H . \quad (33)$$

Na záver tejto kapitoly treba konštatovať, že problematika izostatickej kompenzácie sa v dnešnej dobe nepovažuje za hypotézu ale za teóriu, ktorá je dôkladne potvrdená praktickými výsledkami. Topografické a izostatické korekcie zvislicových odchýlok sa majú priblížiť k adekvátnym korekciám absolútnych odchýlok. Výpočet oboch korekcií je však zaťažený hypotézami o hustote reliéfu i zemskej kôry, a to až do hĺbky izostatickej kompenzácie. Zložky topografických zvislicových odchýlok môžeme určiť aj z gravimetrických údajov. Pre práce v určitom geodetickom systéme sa musia tieto gravimetrické (absolútne) zvislicové odchýlky pretransformovať na astronomicko-geodetické.

### Praktický výstup

Prezentovaná grafická metóda určenia topografických a izostatických zložiek (korekcií) zvislicových odchýlok bola overovaná na modelovom prostredí horského prostredia v Čermel'skej doline pri Košiciach. Overovacie postupy tejto metódy boli realizované na vybraných šiestich bodoch východného svahu Čermel'skej doliny. Lokalita Čermel'ská dolina leží v západnej časti Košickej kotliny a na východných svahoch Slovenského Rudohoria. Jej severovýchodná časť je budovaná neogénnymi sedimentmi a juhozápadná časť súvrstviami gočaltovskej skupiny (perm) gemerika.

K dispozícii boli mapové podklady zo záujmovej oblasti Čermel'ská dolina v mierke 1:10000. Mapový podklad tvorili dve mapy s nákresom polohopisu, popisu (miestne, sídelné a nesídelné názvy) a výškopisu (v príslušných mapových podkladoch vyjadrený vrstevnicami, šrafami a kótami). V príslušnej záujmovej oblasti bolo lokalizovaných šesť bodov, na ktorých sa určovali zložky (meridiánová a transversálna) zvislicových odchýlok. Rozsah záujmoveho územia bol 900 x 2000 m, teda približne 1,8 km<sup>2</sup>. Príslušné body boli volené pozdĺž trasy elektrického nadzemného vedenia vo vzdialenosti od 100 m do 600 m na obe strany. Vzhľadom na veľký objemný rozsah výpočtových prác, bol vhodne volený optimálny počet bodov tak, aby bolo možné vykonať na príslušných mapových podkladoch prehľadnú interpoláciu vypočítaných hodnôt zložiek zvislicových

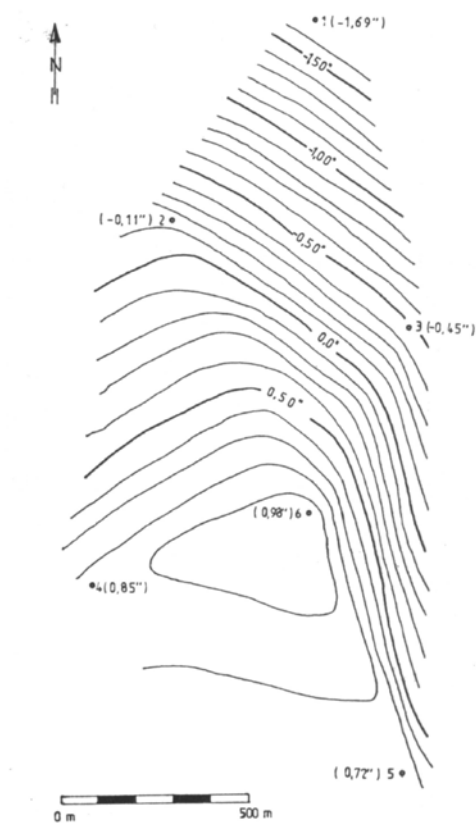
odchýlok. Na príslušných bodoch boli grafickými metódami určené zložky zvislicových odchýlok a ich príslušné korekcie. Jednalo sa o grafickú metódu výšečí podľa *J.R.Clarka* pre určenie topografických korekcií zvislicových odchýlok. Korekcie zvislicových odchýlok o izostatickú kompenzáciu boli stanovené na základe vzťahov (27-31).

### Určenie topografických a izostatických zložiek zvislicových odchýlok v Čermeľskej doline

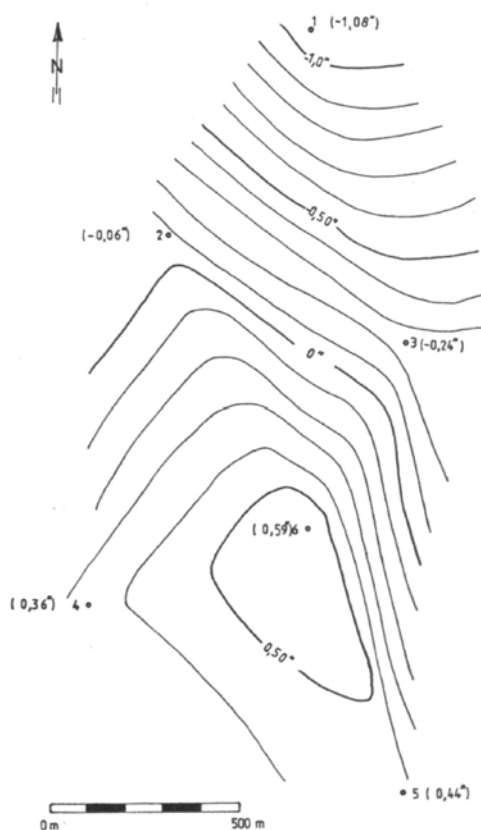
Na určenie zložiek (korekcií) z vplyvu topografických hmôt a izostatickej kompenzácie na príslušné zložky (meridiánovú a transversálnu) zvislicových odchýlok v lokalite Čermeľská dolina bol použitý popísaný postup grafickej metódy pomocou výšečí podľa *J.R.Clarka*. K určeniu príslušných korekcií bola zhotovená priesvitka – sústava kružníc pre určenie topografických korekcií zvislicových odchýlok. Na výpočet hodnôt rozsahu výšeče pre zhotovenie priesvitky bol použitý výpočtový postup podľa *Th.Niethammera*. On volil  $\sin \alpha_n - \sin \alpha_{n-1} = 1/8 = 0,125$ . Pri takejto voľbe konštanty rozdeľujú radiálne lúče kvadrant na osem rovnako veľkých výšečí a desať kvadrantov. S cieľom určiť vplyv topografických hmôt na príslušné zložky zvislicových odchýlok, tj. meridiánovú zložku a priečnu zložku, bola vypočítaná hodnota konštanty  $K = 0,0038225 \cdot 0,125 \ln 1,5 = 0,000193736297$ .

Pomocou konštanty  $K$  boli počítané na príslušných bodoch 1 až 6 korekcie z vplyvu topografických hmôt na príslušné zložky zvislicových odchýlok:

1. Korekcia z vplyvu topografických hmôt na meridiánovú zložku zvislicovej odchýlky - vzťah (18).
2. Korekcia z vplyvu topografických hmôt na priečnu zložku zvislicovej odchýlky - vzťah (19).
3. Korekcia z vplyvu topografických hmôt na celkovú zvislicovú odchýlku  $\Delta\theta_i'' = \sqrt{(\Delta\xi_i'')^2 + (\Delta\eta_i'')^2}$ .



Obr.6. Mapa účinku topografických hmôt a izostatickej kompenzácie na meridiánovú zložku zvislicovej odchýlky na bodoch 1 až 6 v Čermeľskej doline (z mapy v M 1:10000).  
Fig.6. Map of topographic mass and isostatic redress influence on the meridian vertical element on points 1-6 in the Čermeľ valley (from the map in S 1:10000).



Obr.7. Mapa účinku topografických hmôt a izostatickej kompenzácie na priečnu zložku zvislicovej odchýlky na bodoch 1 až 6 v Čermeľskej doline (z mapy v M 1:10000).  
Fig.7. Map of topographic mass and isostatic redress influence on the transverse vertical element on points 1-6 in the Čermeľ valley (from the map in S 1:10000).



Vplyv izostatickej kompenzácie ne príslušné zložky zvislicových odchýlok bol počítaný pomocou izostatického redukčného faktora  $F$  – vzťah (30), ( $r_1 = 20 \text{ m}, r_2 = 30 \text{ m}, T = 56 \text{ km}$  - kompenzačná hĺbka);  $F=0,978231763$ . Korekcia z vplyvu topografických hmôt a izostatickej kompenzácie na meridiánovú zložku zvislicovej odchýlky bola počítaná podľa vzťahu (29) (obr.6). Korekcia z vplyvu topografických hmôt a izostatickej kompenzácie na priečnu zložku zvislicovej odchýlky bola počítaná podľa vzťahu (31) (obr.7). Korekcia z vplyvu topografických hmôt a izostatickej kompenzácie na celkovú zvislicovú odchýlku bola počítaná podľa vzťahu  $\Delta\Theta''_{r+c} = \sqrt{(\Delta\xi''_{r+c})^2 + (\Delta\eta''_{r+c})^2}$ .

Tabuľky 1 a 2 podávajú číselný prehľad celkového účinku topografických hmôt a izostatickej kompenzácie na meridiánovú a priečnu zložku zvislicových odchýlok v jednotlivých vrstvách na bodoch 1 až 6 v Čermel'skej doline. V tab. 3 a 4 sú uvedené výsledné hodnoty vplyvu topografických hmôt a topografických hmôt a izostatickej kompenzácie na celkové hodnoty zvislicových odchýlok v Čermel'skej doline.

Tab.1. Číselný prehľad celkového účinku topografických hmôt a izostatickej kompenzácie na meridiánovú zložku zvislicových odchýlok v jednotlivých vrstvách na bodoch 1 až 6 v Čermel'skej doline.

Tab.1. Numeric review of a global topographic mass and isostatic redress influence on the meridian vertical element in individual layers on points 1-6 in the Čermel valley.

## Bod č.1

Vrstva	$\Delta\xi''_{r+c}$	$\Delta\xi''_{r+c}$
Vrstva 1	-0,019858	-0,0194257
Vrstva 2	-0,0387473	-0,0379038
Vrstva 3	-0,0377786	-0,0369562
Vrstva 4	-0,0726511	-0,0710696
Vrstva 5	-0,0862127	-0,084336
Vrstva 6	-0,173394	-0,1696195
Vrstva 7	-0,2140786	-0,2094185
Vrstva 8	-0,3138528	-0,3070208
Vrstva 9	-0,4585738	-0,4485915
vrstva 10	-0,3136591	-0,3068313
$\Sigma$	-1,7288058	-1,6911728

## Bod č.2

vrstva	$\Delta\xi''_{r+c}$	$\Delta\xi''_{r+c}$
vrstva 1	0	0
vrstva 2	0	0
vrstva 3	0	0
vrstva 4	0	0
vrstva 5	0,00058121	0,00056856
vrstva 6	0,00232484	0,00227423
vrstva 7	0,00755572	0,00739124
vrstva 8	0,00774945	0,00758076
vrstva 9	-0,0486278	-0,0475693
vrstva 10	-0,0864064	-0,0845255
$\Sigma$	-0,116823	-0,11428

## Bod č.3

vrstva	$\Delta\xi''_{r+c}$	$\Delta\xi''_{r+c}$
vrstva 1	-0,0123991	-0,0121292
vrstva 2	-0,0092993	-0,0090969
vrstva 3	-0,0183081	-0,0179095
vrstva 4	-0,0122054	-0,0119397
vrstva 5	-0,0079432	-0,0077703
vrstva 6	0,00561835	0,00549605
vrstva 7	0,01394901	0,01364537
vrstva 8	-0,1073299	-0,1049935
vrstva 9	-0,1546016	-0,1512362
vrstva 10	-0,1588638	-0,1554056
$\Sigma$	-0,461383	-0,4513395

## Bod č.4

ωστωα	$\Delta\xi''_{r+c}$	$\Delta\xi''_{r+c}$
vrstva 1	-0,0054246	-0,0053065
vrstva 2	-0,0054246	-0,0053065
vrstva 3	0,02324836	0,02274228
vrstva 4	0,04572177	0,04472648
vrstva 5	0,02518572	0,02463747
vrstva 6	0,08291914	0,08111413
vrstva 7	0,10539255	0,10309834
vrstva 8	0,14530222	0,14213925
vrstva 9	0,20032333	0,19596265
vrstva 10	0,24778872	0,2423948
$\Sigma$	0,86503257	0,84620233

## Bod č.5

vrstva	$\Delta\xi''_{r+c}$	$\Delta\xi''_{r+c}$
vrstva 1	0	0
vrstva 2	-0,0003875	-0,000379
vrstva 3	0,01298033	0,01269777
vrstva 4	0,02537945	0,02482699
vrstva 5	0,05424616	0,05306532
vrstva 6	0,0608332	0,05950897
vrstva 7	0,0933809	0,09134816
vrstva 8	0,11352947	0,11105813
vrstva 9	0,1809497	0,17701075
vrstva 10	0,19644861	0,19217227
$\Sigma$	0,73736035	0,72130931

## Bod č.6

vrstva	$\Delta\xi''_{r+c}$	$\Delta\xi''_{r+c}$
vrstva 1	0	0
vrstva 2	0,00871813	0,00852835
vrstva 3	0,02053605	0,02008901
vrstva 4	0,19722355	0,19293034
vrstva 5	0	0
vrstva 6	0,04649671	0,04548456
vrstva 7	0,09648068	0,09438046
vrstva 8	0,13232189	0,12944148
vrstva 9	0,22434663	0,219463
vrstva 10	0,27297444	0,26703227
$\Sigma$	0,99909808	0,97734948

Tab.2. Číselný prehľad celkového účinku topografických hmôt a izostatickej kompenzácie na priečnu zložku zvislicových odchýlok v jednotlivých vrstvách na bodoch 1 až 6 v Čermel'skej doline.  
 Tab.2. Numeric review of a global topographic mass and isostatic redress influence on the tranverse vertical element in individual layers on points 1-6 in the Čermel' valley.

**Bod č.1**

vrstva	$\Delta\eta_z \checkmark$	$\Delta\eta_{vzz} \checkmark$
vrstva 1	-0,0106555	-0,0104235
vrstva 2	-0,0348725	-0,0341134
vrstva 3	-0,0600583	-0,0587509
vrstva 4	-0,055118	-0,0539182
vrstva 5	-0,1048113	-0,1025298
vrstva 6	-0,1012272	-0,0990237
vrstva 7	-0,1356154	-0,1326633
vrstva 8	-0,2551507	-0,2495965
vrstva 9	-0,2005171	-0,1961522
vrstva 10	-0,1466584	-0,1434659
$\Sigma$	-1,1046844	-1,0806373

**Bod č.2**

vrstva	$\Delta\eta_z \checkmark$	$\Delta\eta_{vzz} \checkmark$
vrstva 1	0	0
vrstva 2	0	0
vrstva 3	0	0
vrstva 4	0	0
vrstva 5	0,00164676	0,00161091
vrstva 6	0,01317407	0,01288729
vrstva 7	0,01365841	0,01336109
vrstva 8	-0,0003875	-0,000379
vrstva 9	0,00484341	0,00473797
vrstva 10	-0,0893124	-0,0873683
$\Sigma$	-0,0563773	-0,05515

**Bod č.3**

vrstva	$\Delta\eta_z \checkmark$	$\Delta\eta_{vzz} \checkmark$
vrstva 1	-0,0061996	-0,0060646
vrstva 2	-0,0061996	-0,0060646
vrstva 3	-0,013949	-0,0136454
vrstva 4	-0,0172425	-0,0168672
vrstva 5	-0,0149177	-0,014593
vrstva 6	-0,0160801	-0,0097929
vrstva 7	-0,045528	-0,044537
vrstva 8	-0,0505652	-0,0494786
vrstva 9	-0,0294479	-0,0288069
vrstva 10	-0,0546336	-0,0534444
$\Sigma$	-0,2547633	-0,2432944

**Bod č.4**

vrstva	$\Delta\eta_z \checkmark$	$\Delta\eta_{vzz} \checkmark$
vrstva 1	0,0021311	0,00208471
vrstva 2	0,00329352	0,00322183
vrstva 3	0,00910561	0,00890739
vrstva 4	0,02092352	0,02046805
vrstva 5	0,03816605	0,03733525
vrstva 6	0,05192133	0,05079109
vrstva 7	0,05540858	-0,0399524
vrstva 8	0,0805943	0,05264205
vrstva 9	0,08291914	0,08111413
vrstva 10	0,14956442	0,14630867
$\Sigma$	0,49402757	0,36292082

**Bod č.5**

vrstva	$\Delta\eta_z \checkmark$	$\Delta\eta_{vzz} \checkmark$
vrstva 1	0,00271231	0,00265327
vrstva 2	0,00658703	0,00644365
vrstva 3	0,01433649	0,01402441
vrstva 4	0,02292088	0,02236324
vrstva 5	0,02421703	0,02368987
vrstva 6	0,03990967	-0,0361981
vrstva 7	0,056571	0,05533955
vrstva 8	0,12457244	0,12186072
vrstva 9	0,0736198	0,07201722
vrstva 10	0,15983244	0,15635317
$\Sigma$	0,52527909	0,43854697

**Bod č.6**

vrstva	$\Delta\eta_z \checkmark$	$\Delta\eta_{vzz} \checkmark$
vrstva 1	-0,0005812	-0,0005685
vrstva 2	0,00880826	0,00814932
vrstva 3	0,01937363	0,0189519
vrstva 4	0,02634814	0,02577458
vrstva 5	0,02770429	0,02710122
vrstva 6	0,05734595	0,05609762
vrstva 7	0,05695847	0,05571859
vrstva 8	0,08427529	0,08244077
vrstva 9	0,13890892	0,13588512
vrstva 10	0,18753674	0,18345439
$\Sigma$	0,60667849	0,59300496

Tab.3. Výsledné hodnoty vplyvu topografických hmôt na celkové hodnoty zvislicových odchýlok v Čermel'skej doline.  
 Tab.3. Result values of topographic mass influence on the global vertical values in the Čermel' valley.

Bod č.	$\Delta\xi_i''$	$\Delta\eta_i''$	$\Delta\theta_i''$
1	-1,73	-1,1	2,05
2	-0,12	-0,06	0,13
3	-0,46	-0,25	0,52
4	0,87	0,49	1,00
5	0,74	0,53	0,91
6	1,00	0,61	1,17

Tab.4. Výsledné hodnoty vplyvu topografických hmôt a izostatickej kompenzácie na celkové hodnoty zvislicových odchýlok v Čermeľskej doline.

Tab.4. Result values of topographic mass and isostatic redress influence on the global vertical values in the Čermeľ valley.

Bod č.	$\Delta\xi_{+c}''$	$\Delta\eta_{+c}''$	$\Delta\theta_{+c}''$
1	-1,69	-1,08	2,01
2	-0,11	-0,06	0,13
3	-0,45	-0,24	0,51
4	0,85	0,36	0,92
5	0,72	0,44	0,84
6	0,98	0,59	1,14

### Záver

Predkladaná metóda určovania topografických zložiek a zložiek, vyplývajúcich z vplyvu plochy izostatickej kompenzácie v zemskej kôre u relatívnych zvislicových odchýlok v horskom a vysokohorskom prostredí, dáva ďalšiu možnosť pri určovaní takýchto zvislicových odchýlok. Dôležitým momentom v tejto graficko-numerickej metóde je správna voľba mapových podkladov, t.j. prehľadnosť, čitateľnosť znázorňovaného polohopisu a najmä výškopisu. Nemenej dôležitým momentom v prezentovanej metóde je precízne vyhotovenie priesvitky na určenie vplyvu topografického reliéfu na jednotlivé zložky zvislicových odchýlok. Na uľahčenie numerických výpočtov sa odporúča vytvoriť jednoduché programy, ktoré vyplývajú zo samotného postupu výpočtových prác prezentovanej metódy.

Článok vznikol v súvislosti s riešením grantového projektu č.1/7335/20: „Deformačné modelovanie geotektonických recentných pohybov v Košickej kotline“, riešeného na Fakulte BERG TU Košice.

### Literatúra

- BEHINOVÁ, H.: Grafické metódy určovania ťažnicových odchýlok. Dipl. práca, Košice KGaG, F BERG, TU Košice, 2000.
- GERSTBACH, G.: Eine Schnellmethode zur Lotabweichungs - Reduktion im Gebirge. *Innsbruck, Embacher*, 1984.
- GERSTBACH, G.: Rapid computation of vertical deflection effects on crustal deformation networks. *Tectonophysics*, 130, 1986, 427-436.
- HRADILEK, L.: Vysokohorská geodézie, Trigonometrická nivelace a troj-rozměrná terestrická triangulace. Praha, *Academia*, 1984.
- MOJZEŠ, M.: Transformácia súradnicových systémov multiregresnou analýzou. Kartografické listy, roč.1997, č.5, s.47-54.
- OCHABA, Š.: Geofyzika. Bratislava, *SPN*, 1986.
- SEDLÁK, V.: Transformačné postupy pri určovaní astronomicko-geodetických ťažnicových odchýlok. In: Súčasný trendy vývoja geodézie, kartografie a podzemného meračstva, 9. medzinárodná banícka konferencia konaná pri príležitosti 45. výročia založenia Baníckej fakulty TU v Košiciach, Košice, september, 2.-5., 1997, 79-83.
- SEDLÁK, V.: Zem a priestorové súradnicové systémy. Monografia, Košice, *Štroffek*, (vyd.), 1999a.
- SEDLÁK, V.: Graphic method of computation of vertical deflections. *Contributions to Geophysics and Geodesy*, Vol.29, No.2, 1999, Bratislava, 1999b, s.79-80.
- SEDLÁK, V.: Topografické zvislicové odchýlky v horskom prostredí. In: Zborník prednášok zo seminára: „Aktuálne otázky meračstva a inžinierskej geodézie“, Herľany, 9.-10. október 2000, s.115-127.
- SEDLÁK, V.: Zvislicové odchýlky v horských a vysokohorských oblastiach. Monografia, Košice, TU Košice, (vyd.), 2002.
- VYKUTIL, J.: Vyšší geodézie. Praha, *Kartografie*, 1982.