

## Použitie rýchlej grafickej metódy pri určovaní relatívnych zvislicových odchýlok vo Vysokých Tatrách

Vladimír Sedlák<sup>1</sup>, Marek Kožarík<sup>2</sup> a Katarína Rusnáková<sup>3</sup>

### Using the rapid graphic method in determining the vertical deflections in High Tatras

In mountains regions, the effect of vertical deflections appreciably exceeds the accuracy of most geodetic measurements and causes systematic errors of some cm per km at steep sightings. Therefore, crustal movements may be veiled by the enlarged error ellipses. The paper presents a possibility of determining vertical deflections in a high-mountain region by means of using a simple and rapid graphical method. During five minutes it is possible to determine the topographical deflections of the vertical with the accuracy of  $\pm(1 - 2)''$  using explicit mathematical equations and a simple topographical map. The mathematical correction for very asymmetrical peaks by-valleys and irregular slopes are given. No astronomical and geodetic observations or digital height models are necessary. Concluding an example from West Tatras (part of High Tatras) is shown, where the method could be compared with exact values of meridian and transversal vertical deflection elements at 6 points. The exact values of meridian and transverse vertical deflection elements were obtained from the astronomical and geodetic measurements in astronomical-geodetic network in 1961-62. The area covers 4x12 km and heights between 1200 m and 2300 m. The slopes have mean inclination of 40-80 % (maximum 180 %). Because of the steep slopes, a valley fork and the asymmetric mountainsides to the next valleys (8 km), the example is an extreme one.

The obtained results in vertical deflections confirm the presented so called rapid graphic method as a new possibility in determining relative, i.e. astronomical-geodetic vertical deflections. The graphic method is very simple, rapid and it is not necessary to use any geodetic equipment. Just a topographic map, drawing instruments, and a vest-pocketed computer can be enough for determining the vertical deflection during 2-5 minutes.

**Key words:** vertical deflections, graphical method, High Tatras.

### Úvod

V horských a vysokohorských oblastiach, pri strmých zámerách, majú zvislicové (ťažnicové) odchýlky značný vplyv na presnosť geodetických meraní a môžu spôsobiť systematické chyby takýchto zámer rádo aj niekoľko centimetrov na kilometer. Z tohoto dôvodu môže byť polohová presnosť bodov geodetickej siete v takomto prostredí určená s nižšou presnosťou, ako sa od siete požaduje (Sedlák 1997; 2002).

Pre mnohé geodetické siete lokálneho charakteru je dôležitá iba lokálna časť zložiek  $\xi$  (meridiánová zložka) a  $\eta$  (transverzálna zložka) zvislicových odchýlok  $\Theta$ . Regionálna časť zvislicových odchýlok je v rozsahom malých územiach (napr. v časti vysokohorského prostredia) takmer konštantná a môže byť v prípade potreby zohľadnená vyrovnaním a transformáciou celej siete.

Maximálnu hodnotu zvislicovej odchýlky  $\Theta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$  je možné očakávať v blízkosti stredy medzi údolím a hrebeňom pohoria a jej veľkosť závisí od absolútnej hodnoty relatívneho prevýšenia  $H$  hrebeňa nad údolím. Pre horské a vysokohorské územia, ku ktorým patria i Vysoké Tatry, kde  $H$  je približne 2 000 až 2 500 m, môžeme predpokladať, že maximálna hodnota zvislicovej odchýlky  $\Theta_{\max}$  je približne 20'', pričom sklon zámer je v rozsahu 10° až 30°. Preto korekcie smerov a vzdialeností v transformačných vzťahoch pri spracovaní geodetických dát (smerov, zenitových uhlov a dĺžok) budú dosahovať hodnoty 12'' a 50 ppm, čo je 10-násobne viac ako presnosť merania.

Prezentovaná tzv. rýchla grafická metóda určovania zložiek relatívnych zvislicových odchýlok z topografie reliéfu vysokohorského prostredia veľmi jednoducho umožňuje stanoviť takéto zložky ( $\xi$  a  $\eta$ ) z topografických máp.

### Prizmatický model pre horské a vysokohorské oblasti

Podstatou tzv. rýchlej grafickej metódy určovania zložiek relatívnych zvislicových odchýlok (ďalej len zvislicových odchýlok) sú trilaterálne prizmy, aproximujúce horské pásma (masívy). Horská oblasť však nedovoľuje aplikovať na jej horské masívy presnú prizmatickú formu, ale chyby v určení zvislicových odchýlok

<sup>1</sup> prof. Ing. Vladimír Sedlák, Ph.D., Technická univerzita v Košiciach, F BERG, Ústav geodézie a geografických informačných systémov, Park Komenského 19, 042 00 Košice.

<sup>2</sup> Ing. Marek Kožarík, U.S. Steel Košice, Vstupný areál VSŽ Košice-Šaca, 040 01 Košice.

<sup>3</sup> Ing. Katarína Rusnáková, Technická univerzita v Košiciach, F BERG, Ústav geodézie a geografických informačných systémov, Park Komenského 19, 042 00 Košice.

(Recenzovaná a revidovaná verzia dodaná 24. 1. 2005)

sú menšie než 2" v prípadoch, ak sa použijú tzv. voľné prizmy (ľubovoľného tvaru), vhodné na lokálnu topografiu.

Obr.1 znázorňuje geometriu trilateráčnej prizmy aproximujúcej horský masív (bod  $P$  je bod pozorovania-stanovisko). Relatívna zvislicová odchýlka  $\Theta$  pre bod  $P$  je daná explicitným vzťahom (Gerstbach 1986)

$$\Theta = 0,0075'' \left[ h \ln \frac{s_2}{s_1} + \sin \delta \cos \delta \left( l_1 \ln \frac{s_1}{s_0} + l_2 \ln \frac{s_2}{s_0} \right) - \sin^2 \delta \left( l_1 \frac{\tau_1 - \tau_0}{\rho} - l_2 \frac{\tau_2 - \tau_0}{\rho} \right) \right], \quad (1)$$

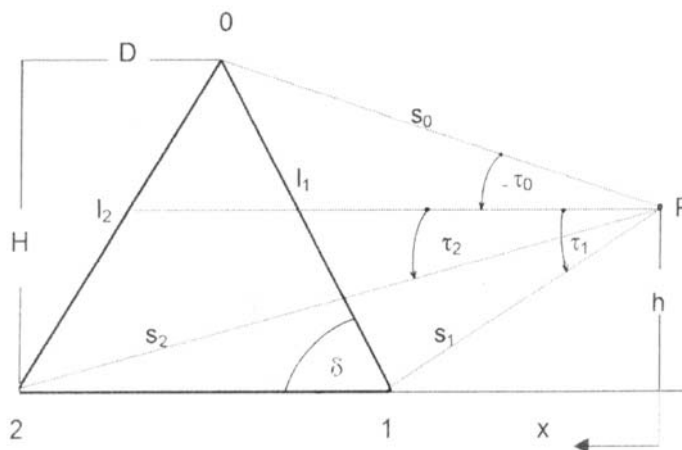
$$\text{kde: } \rho = \frac{180^\circ}{\pi}, \quad l_1 = x_1 + \frac{h}{H} D, \quad l_2 = x_1 + 2D - \frac{h}{H} D, \quad \tau_1 = \arctg \frac{h}{x_1}, \quad s_1 = \sqrt{h^2 + x_1^2}.$$

Ostatné geometrické parametre vyplývajú z obr.1., pričom sa uvažuje priemerná hustota 2,67 g.cm<sup>-3</sup> prizmatického bloku podľa Airyho teórie o blokovej stavbe zemskej kôry.

Zložky  $\xi$  a  $\eta$  sú potom definované vzťahmi (Gerstbach 1986)

$$\xi = \Theta \cos F, \quad \eta = \Theta \sin F, \quad (2)$$

kde:  $F$  je azimut (geodetický) generálneho sklonu svahu prizmy.



Obr. 1. Trilateráčná prizma.  
Fig. 1. Trilateral prism.

V prípade, že uvažujeme strednú výšku  $H_o$  prizmy (horského hrebeňa), strednú vzdialenosť  $D_o$  medzi údolím a hrebeňom, stredný azimut  $F_o$  sklonu svahu a horizontálnu vzdialenosť  $d$  bodu  $P$  od osi údolia, postačí pre určenie takejto zvislicovej odchýlky  $\Theta_o$  s presnosťou  $\pm 2''$  zistiť všetky uvedené parametre z topografickej mapy s presnosťou odhadu  $\pm 200$  m. Takáto zvislicová odchýlka  $\Theta_o$  so svojimi zložkami  $\xi_o, \eta_o$  je daná vzťahom (Sedlák 2002, 2003)

$$\Theta_o = \left\{ \begin{matrix} \xi_o \\ \eta_o \end{matrix} \right\} = 0,035'' H_o \left( \frac{d}{D_o} - \frac{d^2}{D_o^2} \right) \left\{ \begin{matrix} \cos F_o \\ \sin F_o \end{matrix} \right\}. \quad (3)$$

Určenie zvislicových odchýlok podľa vzťahu (3) je veľmi praktické, jednoduché a vyžaduje si iba niekoľko minút práce s topografickou mapou (cca 3 až 5 minút na jeden bod). Pre sklonené údolia a značne sa meniace sklony svahov horských masívov je vhodnejšie použiť lokálne, voľné uloženie prziem (voľné prizmy), namiesto ich fixovania v reťazci.

V prípade, ak protiľahlé horské hrebene majú rôznu výšku a ich rozdiel je väčší než 800 m, pre určenie zvislicových odchýlok  $\Theta_o$  sa odporúča použiť vzťah

$$\Theta_o = \begin{Bmatrix} \xi_o \\ \eta_o \end{Bmatrix} \approx 0,035'' H_o \left[ \frac{d}{D_o} - \frac{d^2}{D_o^2} + \left( 1 - \frac{d}{D_o} \right) \frac{H_o - H_o'}{4H_o} \right] \begin{Bmatrix} \cos F_o \\ \sin F_o \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

kde:  $H_o'$  je stredná výška protiľahlého horského hrebeňa voči horskému hrebeňu so strednou výškou  $H_o$ .

### Korekcia sklonu pre svahy a štíty

Vplyv uklonených plôch na zvislicové odchýlky môže byť determinovaný integráciou topografického redukčného vzťahu. Je to závislé hlavne od výškovej diferencie v rámci uvažovanej oblasti. Korekcia zvislicovej odchýlky  $\Delta\Theta^i$  (inklinačná korekcia) pre stred štvorcovej plochy svahu prizmy o hustote  $2,67 \text{ g.cm}^{-3}$  je daná vzťahom (Sedlák 2002, 2003)

$$\Delta\Theta^i = \begin{Bmatrix} \Delta\xi^i \\ \Delta\eta^i \end{Bmatrix} \cong 0,0066'' \Delta H (1 - 0,35 \text{tg}^2 \delta) \begin{Bmatrix} \cos F \\ \sin F \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

Pre triangulačnú alebo rektangulačnú časť svahu môže byť vzťah (5) násobený váhovým faktorom  $p < 1$ . Ten môže byť použitý i na korekciu zložiek  $\Delta\xi, \Delta\eta$  zvislicovej odchýlky prizmy pre lokálne nepravidelnosti podľa vzťahu (Sedlák 2002)

$$\begin{Bmatrix} \Delta\xi^i \\ \Delta\eta^i \end{Bmatrix} \approx 0,006'' \left[ \Delta H \begin{Bmatrix} \cos F \\ \sin F \end{Bmatrix} - H_o \frac{L}{D_o} \begin{Bmatrix} \cos F_o \\ \sin F_o \end{Bmatrix} \right] p, \quad (6)$$

kde:  $D_o, H_o, F_o$  sú parametre celého svahu,  $p$  je váhový faktor určený z nomogramu pre triangulačný alebo rektangulačný tvar svahu [ $p(B:L), p(\beta)$ ],  $L, \Delta H, F$  sú parametre uvažovaného terénu (Sedlák 2002).

### Určenie zvislicových odchýlok vo Vysokých Tatrách

K overeniu prezentovanej tzv. rýchlej grafickej metódy určovania zložiek relatívnych zvislicových odchýlok vo vysokohorskom prostredí bola vybraná lokalita Žiarskej doliny v Západných Tatrách (Vysoké Tatry). K dispozícii boli digitálne formy mapových podkladov zo záujmovej oblasti Žiarskej doliny v mierke 1:50 000 a 1:20 000. V príslušnej záujmovej oblasti bolo lokalizovaných šesť bodov (*Stará Stávka, Žiarska chata, Baranec, Ráztoka, Baníkov, Prostredný Grúň*), na ktorých boli určené zložky (meridiánová a transversálna) zvislicových odchýlok. Na vybraných bodoch s nadmorskými výškami od cca 900 do 2 200 m boli astronomicko-geodetickými meraniami v rokoch 1961-62 určené relatívne zvislicové odchýlky (Hradilek, 1984). Tento literárny prameň neuvádza hodnoty topografických zložiek (korekcií)  $\Delta\xi_i, \Delta\eta_i$ , ich t.j. korekcií z izostatickej kompenzácie  $\Delta\xi_c, \Delta\eta_c$  určených relatívnych (astronomicko-geodetických) zvislicových odchýlok v 3D geodetickej sieti v Západných Tatrách. Pre objektívne posúdenie vhodnosti prezentovanej grafickej metódy pre určenie takýchto zvislicových odchýlok boli hodnoty topografických zložiek  $\Delta\xi_i, \Delta\eta_i$  určené späť podľa vzťahov (Sedlák 2002, 2003)

$$\Delta\xi_i = \xi^a + \Delta\xi_i^a, \quad \Delta\eta_i = \eta^a + \Delta\eta_i^a, \quad (7)$$

kde:  $\Delta\xi_i^a, \Delta\eta_i^a$  sú rozdiely astronomicko-geodetických zvislicových odchýlok a ich topografických korekcií (určené z mapy takýchto rozdielov) (Hradilek 1984).

Tab.1 podáva ucelený prehľad dosiahnutých výsledkov v určení zvislicových odchýlok vo vybranej lokalite Vysokých Tatier. Z dôvodu strmých sklonov svahov, rozvetvených údolí, asymetrických horských strání a bočných údolí je možno dosiahnuté hodnoty považovať za extrémne (krajné).

Pre hodnotené lokality boli navrhnuté prizmy (Sedlák 2002):

- *Stará Stávka* - pre určenie zložiek zvislicových odchýlok bol zvažovaný vplyv uklonenej plochy jednej voľnej prizmy s pôdorysom štvorcového tvaru; zložky zvislicových odchýlok  $\xi_o, \eta_o$  boli určené zo vzťahu (3).
- *Žiarska chata* - pre určenie zložiek zvislicových odchýlok bol zvažovaný vplyv uklonenej plochy jednej voľnej prizmy s pôdorysom štvorcového tvaru; zložky zvislicových odchýlok  $\xi_o, \eta_o$  boli určené zo vzťahu (3).
- *Baranec* - pre určenie zložiek zvislicových odchýlok bol zvažovaný vplyv uklonených plôch dvoch priziem s pôdorysom trojuholníkového tvaru a jednej prizmy s pôdorysom štvorcového tvaru; inklináčne korekcie  $\Delta\xi^i, \Delta\eta^i$  boli určené zo vzťahu (6) s prihliadnutím na váhový faktor  $p$ .
- *Ráztoka* - pre určenie zložiek zvislicových odchýlok bol zvažovaný vplyv uklonenej plochy jednej voľnej prizmy s pôdorysom štvorcového tvaru; zložky zvislicových odchýlok  $\xi_o, \eta_o$  boli určené zo vzťahu (5).
- *Baníkov* - pre určenie zložiek zvislicových odchýlok bol zvažovaný vplyv uklonených plôch dvoch priziem s pôdorysom trojuholníkového tvaru a jednej prizmy s pôdorysom štvorcového tvaru; inklináčne korekcie  $\Delta\xi^i, \Delta\eta^i$  boli určené zo vzťahu (6) s prihliadnutím na váhový faktor  $p$ .
- *Prostredný Grúň* - pre určenie zložiek zvislicových odchýlok bol zvažovaný vplyv uklonenej plochy jednej voľnej prizmy s pôdorysom štvorcového tvaru; zložky zvislicových odchýlok  $\xi_o, \eta_o$  boli určené zo vzťahu (3).

Tab.1. Zložky zvislicových odchýlok v Žiarskej doline.

Tab.1. The vertical deflection elements in the Žiar Valley.

Bod	$F_o$ [°]	$d$ [m]	$\xi_o$ ["]	$\Delta\xi_t$ ["]	$\xi_o + \Delta\xi_t$ ["]	Inklináčne korekcie						$\Delta\xi^f$ ["]	$\xi$ ["]	$\xi^a$ ["]
	$H_o$ [m]	$D_o$ [m]	$\eta_o$ ["]	$\Delta\eta_t$ ["]	$\eta_o + \Delta\eta_t$ ["]	$F$ [°]	$\Delta H$ [m]	$L$ [m]	$\rho$	$\Delta\xi^i$ ["]	$\Delta\eta^i$ ["]	$\Delta\eta^f$ ["]	$\eta$ ["]	$\eta^a$ ["]
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Stará Stávka 1298,9 m	145	600	0.364	-3.061	-1.697					0	0	-6.227	-7.924	-8.863
	230	650	0.440	0.944	1.384					0	0	-6.843	-5.459	-7.283
Žiarska chata 1269,0 m	135	83	2.909	-0.027	-2.882					0	0	-3.951	-6.833	-5.86
	40	36	-3.049	-1.253	-4.302					0	0	3.694	-0.608	-0.645
Baranec 2184,6 m			0	-8.29	-8.29	75	750	1700	0,85	0,86	0,29	2.863	-4.567	-4.567
			0	-1.37	-1.37	177	650	1750	0,70			-0.385	-1.465	-2.405
						283	900	1800	0,80					
Ráztoka 1948,0 m	98	1600	-0.360	-10.2	-10.56					0	0	1.787	-8.773	-8.053
	700	1800	-2.306	-0.41	-2.716					0	0	5.46	2.744	2.734
Baníkov 2178,0 m			0	-7.06	-7.06	43	700	2850	0,82	-0,44	-5,12	1.176	-6.324	-7.836
			0	0.36	0.36	109	950	2000	0,82			6.708	1.948	1.228
						249	800	2400	0,40					
Prostredný Grúň 1771,0 m	197	1300	-5.174	-1.028	-6.202					0	0	-3.308	-9.51	-8.482
	250	910	-1.389	-0.792	-2.181					0	0	0.273	-1.908	-1.116

Pre dosiahnutie vyššej presnosti v určení takýchto zvislicových odchýlok boli na jednotlivých vyššie uvedených bodoch v Žiarskej doline určené aj ich tzv. regionálne zložky  $\Delta\xi^r, \Delta\eta^r$ . Opäť bol použitý mapový materiál z danej lokality Západných Tatier, v ktorom boli v okolí jednotlivých bodov geodetickej siete horské masívy nahradené voľnými prizmami s pôdorysom obdĺžnikového tvaru. Takéto zložky zvislicových odchýlok sú potom determinované súčtom jednotlivých čiastkových hodnôt  $\Delta\xi^r, \Delta\eta^r$ , prislúchajúcich jednotlivým „voľným“ masívom (prizmám).

Topografické korekcie zvislicových odchýlok v prípade Žiarskej doliny sú zahrnuté v postupe výpočtu prezentovanej metódy, t.j. podľa vzťahov (1) až (7), kde sa uvažujú tzv. regionálne zložky zvislicových odchýlok (Sedlák 2002).

## Záver

Predkladaná tzv. „rýchla“ grafická metóda určovania relatívnych zvislicových odchýlok v horskom a vysokohorskom prostredí je ďalšou možnosťou ich určovania. Dôležitým momentom pri tejto grafickej metóde je správna voľba navrhovaných priziem, ich tvaru a veľkosti tak, aby čo najvýstižnejšie charakterizovali horský i vysokohorský reliéf. Čiastočné rozdiely v hodnotách zložiek zvislicových odchýlok určených grafickou metódou a astronomicko-geodetickým spôsobom (tab.1, stĺpce 13 a 14) môžu byť spôsobené nedostatočným plošným rozsahom pri výpočte tzv. regionálnych zvislicových odchýlok a zanedbaním niektorých nevýrazných hrebeňov alebo štítov. Treba pripomenúť že vzhľadom na dobu určenia zložiek zvislicových odchýlok v Žiarskej doline astronomicko-geodetickým meraním s adekvátnym meračským prístrojovým vybavením (roky 1961-62) a vzhľadom na súčasnosť, so širokou možnosťou použitia vysoko presnej meračskej prístrojovej techniky,

nie je možné považovať určené zložky zvislicových odchýlok z astronomických a geodetických meraní v rokoch 1961-2 vo Vysokých Tatrách za absolútne presné (Hradilek 1984). Z uvedeného dôvodu je vzájomné porovnanie zložiek zvislicových odchýlok, určených oboma metódami len relatívne.

*Článok vznikol v súvislosti s riešením grantových projektov č.1/0368/03: „Monitorovanie a modelovanie geotektonických recentných pohybov v košickej kotline v GIS z hľadiska ochrany životného prostredia“ a č. 1/8073/01: „Monitorovanie deformačných procesov a integrované hodnotenie ich environmentálnych rizík na podrúbaných a zosuvných územiach“, riešených na Fakulte BERG TU v Košiciach.*

#### Literatúra - References

- Gerstbach, G.: Rapid computation of vertical deflection effects on crustal deformation networks. *Tectonophysics*, 130 (1986), 427-436.
- Hradilek, L.: Vysokohorská geodézie, Trigonometrická nivelace a trojrozmerná terestrická triangulace. *Academia, Praha, 1984.*
- Sedlák, V.: Transformačné postupy pri určovaní astronomicko-geodetických ťažnicových odchýlok. In: Súčasný trendy vývoja geodézie, kartografie a podzemného meračstva, 9. medzinárodná banická konf. 45. výr. založenia Banickej fakulty TU v Košiciach, september, 2.-5., 1997, Košice, s. 79-83.
- Sedlák, V.: Zvislicové odchýlky v horskom a vysokohorskom prostredí. *Monografia, TU Košice, (vyd.), Košice, 2002.*
- Sedlák, V.: Topografické a izostatické zložky zvislicových odchýlok. *Acta Montanistica Slovaca, Roč.8, č.1/2003, Košice, 2003, 42-52.*