

## Možnosti eliminácie vplyvu refrakcie na trigonometrické meranie výšok

Štefan Sokol<sup>1</sup> a Ján Ježko<sup>2</sup>

### *Possibilities of eliminating the refraction influence on the trigonometric elevation measurement*

*The most of geodetic measurements are carried out in the lowest non-stable air levels over the terrain, which are very difficult and change in time with the optical environment. These air levels are approximately parallel with the earth surface, reaching the elevation of several metres, and about 99 % of all geodetic measurements are realized here.*

*In the last years there was a great development in the area of constructional solution of measuring instruments. Modern electronic theodolites of the highest accuracy class reach the accuracy of direction (angle) measurement of 0,1 – 0,2 mgon and electronic rangefinders more than 0,5 mm for 1 – 2 km distances. That's why the situation rise up where the important source of systematic errors in the measuring process are not instrumental errors but errors of the environment, in which is the measuring process realized.*

*Because of this high accuracy of geodetic instruments, the refraction influence is a base limiting factor of increasing the measurement accuracy.*

*In the past, the refraction influence was mostly neglected in the engineering geodesy but, in a present, requirements are given on a higher accuracy. That's why various theoretical refraction models and practical inspecting processes are used, which enable us to decrease the refraction influence on the measured values.*

**Key words:** Refraction, refraction coefficient, air refractive index, mathematical methods, physical methods, dispersion methods.

### Úvod

Väčšina geodetických meraní je vykonávaná v najnižších labilných vzduchových vrstvách nad terénom, ktoré sú sami o sebe veľmi zložité a s časovo sa meniacim optickým prostredím. Tieto vzduchové vrstvy sú približne rovnobežné so zemským povrchom, dosahujú výšku niekoľko metrov a v nich je vykonávaných zhruba 99 % všetkých geodetických meraní. V posledných rokoch došlo v oblasti konštrukčných riešení meracích prístrojov k nespornému pokroku. Moderné elektronické teodolity najvyššej triedy presnosti dosahujú presnosť merania smerov 0,1 – 0,2 mgon a elektrooptické dĺžkomery presnosť vyššiu ako 0,5 mm pre dĺžky 1 – 2 km. Tým vzniká situácia, kedy podstatným zdrojom systematických chýb v procese merania už nie sú prístrojové chyby, ale hlavným zdrojom sú chyby z prostredia, v ktorom je proces merania realizovaný. Pri tejto vysokej presnosti geodetických prístrojov ostáva vplyv refrakcie základným limitujúcim faktorom zvyšovania presnosti merania. V minulosti bol vplyv refrakcie v oblasti inžinierskej geodézie bežne zanedbávaný, avšak v súčasnosti sú kladené vyššie nároky na presnosť. Preto je využívaný celý rad teoretických refrakčných modelov a prakticky overených postupov, ktoré nám umožňujú znížiť vplyv refrakcie na meranú veličinu. Veľmi často v inžinierskej geodézii vzniká situácia, keď na výškové sledovanie objektu resp. priestoru je potrebné z hľadiska vyžadovanej presnosti určovania výškových zmien použiť metódu trigonometrického určovania výšok. Predložený príspevok sa teda venuje opakovanému trigonometrickému určovaniu výšok (so zámerami od niekoľko desiatok metrov do cca 300 m) a využitiu refrakčného modelu z meraných meteorologických činiteľov pre zníženie vplyvu refrakcie.

### Súčasný stav problematiky

Pri súčasnom vývoji elektronických geodetických prístrojov a výpočtovej techniky má pri určovaní výškových posunov dobré perspektívy rozvoja a využitia trigonometrická metóda merania prevýšení. Uplatňuje sa predovšetkým v tých prípadoch, kde nie je možné použiť niveláciu alebo tam, kde treba určiť väčšie prevýšenie na kratšiu dĺžku. Z ekonomického hľadiska je trigonometrická metóda merania výškových posunov vhodná vtedy, ak sa kombinuje s meraním vodorovných posunov. Limitujúcim faktorom jej použitia je vplyv atmosférickej refrakcie (Sokol, 1976). Problém určovania, resp. vylúčenia vplyvu vertikálnej refrakcie na merané prevýšenie nie je nový a zaujíma geodetov od začiatku 19. storočia. Pre určenie, resp. vylúčenie refrakcie existuje celý rad metód, z ktorých žiadna nie je dokonalá a všeobecne platná (Hradílek, 1984).

<sup>1</sup> prof., Ing., Štefan Sokol, PhD., Department of Surveying, Faculty of Civil Engineering, Slovak University of Technology, Radlinského11, 813 68 Bratislava, Slovak Republic, tel.: 00421 2 59274 639, [stefan.sokol@stuba.sk](mailto:stefan.sokol@stuba.sk)

<sup>2</sup> Ing., Ján Ježko, PhD., Department of Surveying, Faculty of Civil Engineering, Slovak University of Technology, Radlinského11, 813 68 Bratislava, Slovak Republic, tel.: 00421 2 59274 338, [jan.jezko@stuba.sk](mailto:jan.jezko@stuba.sk)  
(Recenzovaná a revidovaná verzia dodaná 29. 4. 2005)

### Matematické metódy určovania koeficienta refrakcie

Táto metóda určovania koeficienta refrakcie je historicky najstaršia. Pri tejto metóde refrakcie je refrakčný koeficient určovaný na základe geometrických podmienok, ktoré by mali spĺňať nadbytočné merania zenitových (výškových) uhlov za predpokladu platnosti určitej hypotézy refrakčného modelu, ktorý má fyzikálne opodstatnenie pre určité špecifické podmienky (Sokol, 1976).

**Refrakčný koeficient k** je možné určiť zo vzťahu:

$$k_{ij} = \frac{R_{ij}}{r_{ij}}. \quad (1)$$

Najznámejšou a najpoužívanejšou priemernou hodnotou refrakčného koeficienta je:  $k = 0,1306$ , určil ju Gauss v rokoch 1823 – 1826 z vyrovnania tzv. Hannoverského stupňového merania (sieť pozostávala z 28 bodov s dĺžkami strán 5-85 km) medzi Göttingenom a Altonom. Táto hodnota sa začala používať ako univerzálna konštanta riešiaci problematiku refrakcie. Treba zdôrazniť, že nie je to vždy správny postup, nakoľko bola určená v podmienkach celkom odlišných v akých je realizovaná väčšina geodetických meraní, napr. v inžinierskej geodézii pri deformačných meraniach sú zámery kratšie a často symetrické s malou výškou nad terénom a ovplyvnené okamžitým stavom atmosféry.

Na veľkosť chyby z refrakcie má značný vplyv napr. teplotná inverzia, zmena vertikálneho teplotného gradientu počas dňa (predovšetkým pri východe a západe slnka), ako aj povrch nad ktorým prechádza zámerný lúč. Výsledkom sú značné rozdiely skutočného refrakčného koeficienta od uvedenej konštantnej hodnoty a jej mechanické zavádzanie môže dokonca spôsobiť väčšie chyby než úplné zanedbanie opravy z vplyvu refrakcie  $k = 0$  (pri našich experimentálnych meraniach dosahoval refrakčný koeficient aj záporné hodnoty, čo je v prízemných vrstvách veľmi časté). Výpočet refrakčného koeficienta z experimentálneho merania 8. – 9. 6. 1976 je uvedený v tab. 1.

Tab. 1. Výpočet refrakčného koeficienta  
Tab. 1. Calculation of refraction coefficient

| Experimentálne meranie 8. – 9. 6. 1976 |                 |                 |                  |                  |                  |                  |                  |                  |                  |                 |                 |                 |                 |
|--|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Čas pozorovania. [h]                   | 7 <sup>00</sup> | 9 <sup>00</sup> | 11 <sup>00</sup> | 13 <sup>00</sup> | 15 <sup>00</sup> | 17 <sup>00</sup> | 19 <sup>00</sup> | 21 <sup>00</sup> | 23 <sup>00</sup> | 1 <sup>00</sup> | 3 <sup>00</sup> | 5 <sup>00</sup> | 7 <sup>00</sup> |
| Koeficient refrakcie k                 | 0,24            | 0,31            | 0,56             | 0,60             | 0,39             | 0,12             | -0,03            | -0,10            | -0,46            | -1,01           | -1,23           | -0,97           | -0,72           |

V týchto prípadoch dochádza k paradoxnej situácii, že merané prevýšenie nespresníme, ale často znehodnotíme.

### Určenie vertikálneho koeficienta refrakcie z meraných zenitových uhlov

V praxi sa používajú dva základné postupy:

1. Výpočet refrakčného koeficienta pre každé stanovisko na základe opakovane meraných zenitových uhlov pri vyrovnaní geodetických sietí. Prvý model predpokladá, že v celej výškovej sieti prijíma konštantnú hodnotu refrakčného koeficienta  $k = 0,13$  alebo inú hodnotu v danej sieti vhodnejšiu pre rôzne časové obdobia. Uvažuje sa rovnaká vertikálna refrakcia pre všetky zámery alebo časť stanovísk siete medzi bodmi  $P_i$  a  $P_j$ . V takomto prípade hovoríme, že ide o statický model refrakcie pre určitú lokalitu, ktorý sa často označuje ako **sféricko – lineárny** model atmosféry. Hodnota refrakčného koeficienta určená pri vyrovnaní, ako neznáma konštanta rovnaká pre všetky stanoviská, obecné nevylúči systematickú chybu z refrakcie na jednotlivých stanoviskách, aj keď môže zlepšiť celkové vyrovnanie. Zvyčajne po takomto vyrovnaní zostáva veľmi veľká a posteriori chyba vyrovnaných zenitových uhlov spôsobená chybou z refrakcie. Model je detailne rozpracovaný a prakticky overený (Hradílek, 1984).
2. Určenie – vylúčenie refrakcie z obojstranne meraných zenitových uhlov (podľa možnosti súčasne). Druhý model je možné veľmi dobre využiť v plochom teréne, keď sú zámery približne symetrické nad terénom, a tým sú podobne aj refrakčné podmienky na stanovisku a v cieľi, pričom je treba zdôrazniť, že zámery nie sú dlhé (max. 2 km).

V prípade obojstranných zámery platí hypotéza, že vplyv refrakcie (v rovnakom čase) na obidvoch koncoch zámery je približne rovnaký. Vzniká tak refrakčný model s konštantným refrakčným koeficientom pre zámeru. Pri takomto refrakčnom modeli pre vertikálnu zložku refrakcie môžeme refrakčnú krivku nahradiť kružnicovým oblúkom.

Postupom obojstranného merania zenitových uhlov sa použil už v roku 1840 (Bayer) (Hradílek, 1984). V súčasných aplikáciách sa však často zabúda na dôležité kritérium použitia tohto postupu, ktoré hovorí o tom, že nutnou (nie však postačujúcou) podmienkou pre rovnosť refrakčných koeficientov na oboch

koncoch zámery je aj rovnosť zmien refrakčných koeficientov určených opakovaným meraním zenitových uhlov. Je treba zdôrazniť, že v inžinierskej geodézii túto metódu väčšinou nie je možné použiť pri deformačných meraniach.

### Všeobecný model vyjadrenia refrakčného koeficientu

V tomto modeli pre obojstranne merané zámery (Hradílek, 1984) je možné refrakčný koeficient  $k_{ij}$  zámery  $P_iP_j$  vyjadriť súčtom funkcií  $F(P_i)$  a  $G(P_iP_j)$  a to:

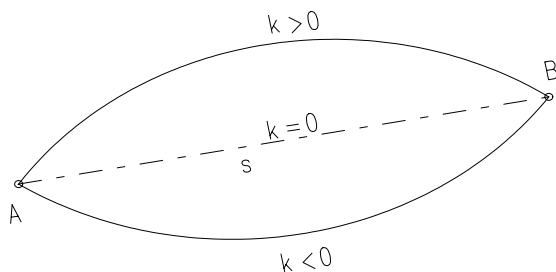
$$k_{ij} = F(P_i) + G(P_iP_j), \quad (2)$$

kde:  $F(P_i)$  vyjadruje hlavnú časť refrakcie na stanovišti  $P_i$ , ktorá je rovnaká pre všetky zámery,  $G(P_iP_j)$  vyjadruje refrakčnú korekciu zámery  $P_iP_j$ .

Tvar funkcií  $F(P_i)$  a  $G(P_iP_j)$  je určovaný z opakovane meraných zenitových uhlov, prevezme sa z fyzikálneho vyjadrenia refrakcie, prípadne z doterajšieho výskumu refrakcie. Z hľadiska aplikovateľnosti v praxi je žiadúce, aby tvar funkcií  $F(\cdot)$  a  $G(\cdot)$  bol jednoduchý a aby obsahoval malý počet neznámych parametrov.

### Fyzikálne metódy

Snaha stanoviť matematické vzťahy vertikálnej refrakcie na základe meteorologických veličín ovzdušia siaha do dávnej minulosti. Optická hustota ovzdušia a tým aj index lomu, závisí od priamo meraných meteorologických veličín, t.j. teploty, tlaku a vlhkosti ovzdušia. Zjednodušene je možné povedať, že spomínané veličiny v podstate determinujú tvar a mieru zakrivenia refrakčnej krivky (obr. 1).



Obr. 1. Prechod zámerného lúča atmosférou  
Fig. 1. Transition of sight beam through atmosphere

Zmena indexu lomu zámerného lúča závisí od zmeny teploty, vlhkosti, tlaku ovzdušia, vlnovej dĺžky a od iných fyzikálnych činiteľov nachádzajúcich sa v priestore, v ktorom prebieha zámery. Pre index lomu viditeľného a blízkeho infračerveného vlnenia pre mikroklimatu Rieger (1996) odporúčame použiť vzťah:

$$N_L = (n_L - 1) \cdot 10^6 = \left( \frac{273.15}{1013.25} \cdot \frac{N_g \cdot \rho}{(273.15 + t)} \right) - \frac{11.27e}{(273.15 + t)}, \quad (3)$$

kde:  $N_L$  - variácia indexu lomu, rozdiel od hodnoty indexu lomu vákua v „ppm“, viditeľného a blízkeho infračerveného žiarenia vo vlhkom ovzduší,

- t - teplota ovzdušia [°C],
- $\rho$  - atmosferický tlak [Pa],
- e - napätie vodných pár [Pa].

Hodnotu  $n_L$  môžeme získať riešením rovnice zámerného lúča v izotropnom nehomogénnom prostredí. Rovnica zámerného lúča je diferenciálnou rovnicou druhého radu (Vondrák, 2001). Variácia indexu lomu  $N_g$  je určená podľa Barell & Searse (1939) pre štandardné ovzdušie s obsahom 0,03 % CO<sub>2</sub>:

$$N_g = (n_g - 1) \cdot 10^6 = 287.604 + 4.8864 \cdot \lambda^{-2} + 0.0680 \cdot \lambda^{-4}. \quad (4)$$

Násobením všetkých konštánt koeficientom 1,00004707, dostaneme vzťah pre hodnotu 0,037570 obsahu CO<sub>2</sub>. Tento vzťah sa líši od pôvodného o menšiu hodnotu ako 0,000024 %.

Absolútny index lomu ovzdušia sa zväčšuje s klesajúcou vlnovou dĺžkou elektromagnetického žiarenia (WITTE, 1990). V oblasti viditeľného žiarenia platí so značnou presnosťou, že hodnota  $(n-1)$  je pre danú vlnovú dĺžku úmerná hustote ovzdušia.

### Vplyv zmeny teplotného gradienta

Z hľadiska geodetických meraní je dôležité predovšetkým to, ako sa správajú zámerné lúče, ktoré prechádzajú vrstvami ovzdušia bezprostredne priliehajúcimi k zemskému povrchu. V prvom rade ide o rozloženie teploty v týchto vrstvách, čo je základný faktor, ktorý ovplyvňuje priebeh zámerných lúčov. Rozloženie teplôt v prízemných vrstvách ovzdušia veľmi zložito závisí na mnohých faktoroch, z ktorých možno uviesť najmä slnečnú radiáciu, vlastnosti pôdy, reliéf, vietor, množstvo prachu a pár, stupeň

a charakter oblačnosti. Zmenami teplôt v uvedených vrstvách ovzdušia v priestore a čase je podmienený celý rad javov, z ktorých majú v prvom rade význam vibrácia a refrakcia ovzdušia.

Intenzita procesov závisí od kvantity energie slnečného žiarenia, ktorá dosahuje zemský povrch. Počas letných slnečných dní možno očakávať najväčšie vplyvy. Keď je zamračené, môže sa nočný proces inverzie predĺžiť aj do priebehu dňa.

Závislosť vertikálneho teplotného gradienta nad zemským povrchom v rozmedzí „hraničnej“ vrstvy je možné vyjadriť funkciou:

$$\frac{dt}{dh} = ah^b \quad (5)$$

Koeficient **a** (záporný v prípade klesania teploty) je funkciou výšky slnka nad horizontom i charakterom povrchu pôdy. Exponent **b** kolíše v medziach od  $-0,7$  do  $-1,3$ , pri jeho strednej hodnote  $-1,05$  cez deň  $a = -0,9$  v noci.

V konkrétnych prípadoch môže vertikálny teplotný gradient ( $dt/dH$ ) nadobudnúť aj iné hodnoty ako  $-0,01$ . Z toho vyplýva, že refrakčný koeficient **k** môže nadobudnúť aj záporné hodnoty. Opravu zenitového uhla z refrakcie vypočítame podľa vzťahu [Vitásek, 1988]:

$$d\rho \doteq (k_s^2) : 2R \quad (6)$$

Refrakčný koeficient **k** je daný vzťahom:

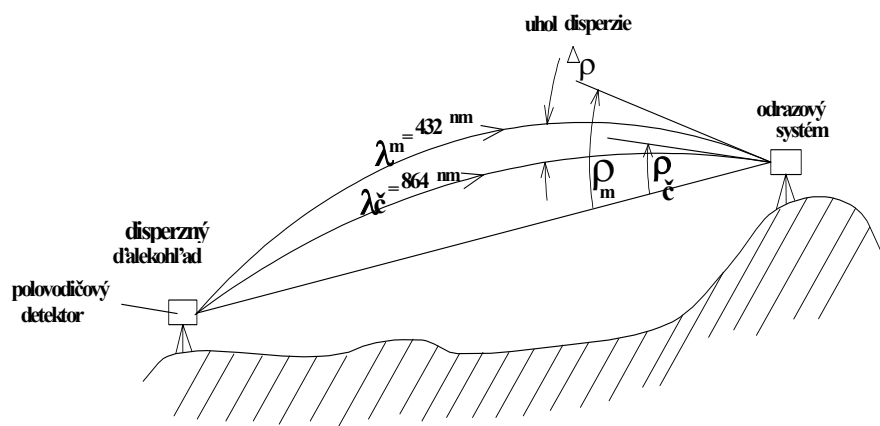
$$k \doteq 673(b : T^2) [0,034 + (dT^o : dH_m)] \doteq 5,9 [0,034 + (dT^o : dH_m)] \quad (7)$$

Keď adiabatický gradient ( $dT^o : dH_m$ ) =  $-0,01$ , potom  $k = 0,14$  v konkrétnych prípadoch môže vzniknúť aj situácia, že  $k = 0$ ,  $k > 0$ ,  $k < 0$ , potom zámerný lúč prechádza atmosférou podľa (obr. 1).

Záverom o danej problematike v prízemných vrstvách možno uviesť, že teplotné pomery v prízemných vrstvách atmosféry sú premenlivé s miestom, dennou a nočnou dobou a s meteorologickými podmienkami.

### Disperzné metódy

Súčasný trend výskumu terestrickej refrakcie smeruje k nepriamym metódam riešenia tohto problému, napr. disperznými metódami. V súčasných digitálnych nivelačných prístrojoch a robotických teodolitoch sú osadené CCD senzory, ktoré umožňujú určiť vplyv terestrickej refrakcie už počas merania. Prvé pokusy riešenia týmto postupom boli predstavené v roku 1994 [Schauerte et al., 1994]. Disperzné metódy sú založené na princípe využívania elektromagnetických vln s rozdielnymi vlnovými dĺžkami a tým aj rôznym



lomovým číslom určujúcim indexu lomu, ktorý je rozhodujúcou veličinou pri opravě rýchlosti šírenia sa elektromagnetických vln (obr. 2).

Obr. 2. Funkčná závislosť indexu lomu od vlnovej dĺžky  
Fig. 2. Function dependancy of refractive index on wave-

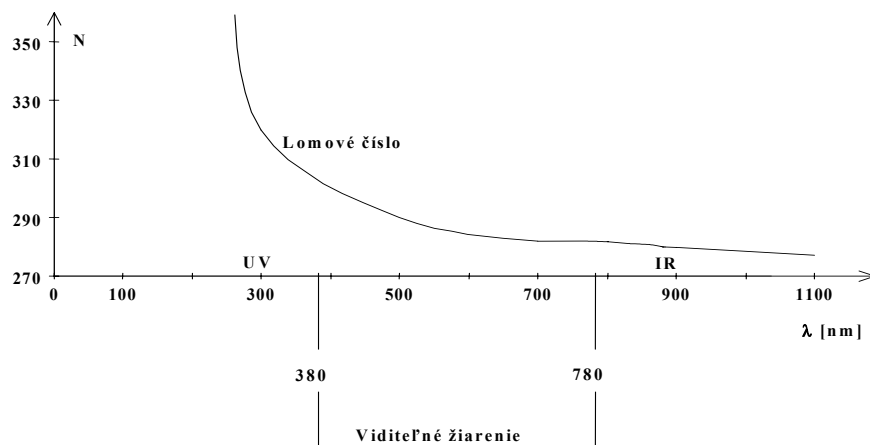
length

Zmena indexu lomu vyvolaná rôznou hustotou ovzdušia spôsobuje zakrivenie svetelného lúča. Z tohto dôvodu je svetelný lúč rozložený na spektrálne podiely. Tento jav je možné využiť na určenie refrakčného uhla pri terestrických meraniach uhlov (obr. 3.) (Schwarz, 1985). Rozdiel uhlov medzi modrým (index  $m$ ) a červeným (č) lúčom je veľmi malý. Firma Leica vyvinula pre tzv. Rapid Precision Levelling System (RPLS) špeciálny merač disperzie.

Pri ohniskovej vzdialenosti ďalekohľadu 300 mm musí byť diferenciálna poloha určená detektorom s presnosťou 0,1 mm.

Použitie sú zdroje žiarenia s vlnovými dĺžkami 864 nm a 432 nm. Vzhľadom na to, že farebné lúče sú snímané tou istou optikou a rovnakým detektorom, rotačný filter postupne potláča infračervené alebo modré žiarenie (WITTE et al., 2001). Na tomto princípe je k dispozícii prístroj pre trigonometrickú niveláciu,

ktorá zodpovedá nárokom kladeným na presnú geometrickú niveláciu. Vzhľadom na vysoké výrobné náklady, prístroj existuje len ako prototyp.



Obr. 3. Princíp disperzného merania  
Fig. 3. Principle of dispersive measurement

Uvedenou problematikou sa zaoberajú popredné výskumné ústavy a to: National Physical Laboratory na Univerzite vo Washingtone, Technische Universität Mníchov, firma Leica, Geodätisches Institut na Univerzite v Bone a ďalšie

### Usporiadanie experimentu meraní

Pri jednostrannom trigonometrickom meraní výšok sú merané zenitové uhly významne ovplyvnené systematickými chybami, ktoré nie je možné odstrániť (výrazne potlačiť) metódou merania. Potom je východiskom účelne zahrnúť tieto systematické vplyvy do matematického modelu pre vyrovnanie a primerane zvýšiť počet meraných zenitových uhlov.

V prezentovanom prípade bol experiment usporiadaný tak, že merania boli vykonané najpresnejším prístrojom, ktorý bol v danom období k dispozícii, rovnakým postupom a metódou. Pri jednotlivých experimentoch boli registrované zmeny atmosférických podmienok, najmä zmeny teploty, vlhkosti a barometrického tlaku ovzdušia.

Trigonometrické meranie bolo realizované v priebehu niekoľkých dní a nocí v rokoch 1975 – 2000 v lokalitách, kde bola ťažká stabilizácia bodov a to v Bratislave, Klieština – okr. Púchov, Háje – okr. Liptovský Mikuláš a v Gabčíkove. Pozorované body sú stabilizované paženými vrtmi cca  $\varnothing$  500 mm vyplnenými betónom. Vrty sú hĺbené od 6 do 10 m, t.j. 0,5 m pod minimálnu hladinu spodnej vody. Vrty sú nad terénom upravené ako piliere o výške 1,3 m, resp. 3,0 m (obr. 4 a obr. 5). Hlavy pilierov sú opatrené centračnou podložkou so závitom na presné centrovanie prístrojov, resp. cieľových terčov.

Prevýšenia medzi jednotlivými bodmi boli určené dvakrát veľmi presnou niveláciou – na začiatku a na konci experimentu. Dĺžky medzi pozorovanými bodmi boli merané elektrooptickými dĺžkomermi s empirickou strednou chybou do 5 mm. Na meranie zenitových uhlov pri experimentoch boli použité prístroje Wild T3, Elta S10 a Geodimeter 600. V priebehu dňa bolo meraných 7, 12 alebo až 13 skupín zenitových uhlov vždy po 10 meraniach. Časový interval medzi skupinami bol 1 h, resp. 2 h. Pri meraniach v skupinách vo výške zámery (na stanovisku a v cieľi) boli merané zmeny teploty, vlhkosti a barometrického tlaku ovzdušia. Takto určené výšky pozorovaných bodov boli usporiadané do skupín a vyhodnotené regresnou analýzou.



Obr. 4. Prístroj WILD T3  
Fig. 4. WILD T3 instrument



Obr. 5. Stabilizácia cieľa  
Fig. 5. Target stabilisation

### Matematický model riešenia - odhad parametrov

Na vyhodnotenie výsledkov experimentálnych meraní ovplyvnených zmenami atmosférických podmienok bol využitý matematický model (Sokol, 1976), v ktorom pri zostavení určujúcej rovnice bol uvažovaný predpoklad, že ide o náhodnú premennú s normálnym rozdelením:

Predpokladajme normalitu náhodne premennej  $\xi$

$$\{\xi \sim N[y_{t_0, p_0, e_0} + b_{y,t}(t - t_0) + b_{y,e}(e - e_0) + b_{y,p}(p - p_0)]\sigma^2 : (t = t_1, \dots, t_j; e_1, \dots, e_j; p_1, \dots, p_j)\}, \quad (8)$$

kde  $t$ ,  $e$ , a  $p$  sú teplota, vlhkosť a barometrický tlak ovzdušia.

Lineárny nevychýlený odhad parametrov, ktorý má v triede lineárnych odhadov minimálne disperzie svojich komponentov, je v prípade regresného modelu práve ten odhad  $\hat{\Theta}$ , ktorý minimalizuje kvadratickú formu (Sokol, 1976)

$$(y - \mathbf{A}\hat{\Theta})' \sum^{-1} (y - \mathbf{A}\hat{\Theta}), \quad (9)$$

kde  $\sum$  je kovariančná matica náhodného vektora  $\xi$  a  $y$  jeho realizácia.

Lineárny nevychýlený odhad vektorového parametra  $\hat{\Theta}$  je daný vzťahom [Kubáček, 1983]

$$\hat{\Theta} = (\mathbf{A}' \sum^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}' \sum^{-1} y, \quad (10)$$

Pre kovariančnú maticu  $\sum \hat{\Theta}$  platí:

$$\sum \hat{\Theta} = E[(\hat{\Theta} - \Theta)(\hat{\Theta} - \Theta)'] = (\mathbf{A}' \sum^{-1} \mathbf{A})^{-1}, \quad (11)$$

kde  $\mathbf{A}$  je matica plánu typu  $m \times n$ ,  $\mathbf{A}'$  je matica, transponovaná matica  $\mathbf{A}$  a  $E(\xi)$  predstavuje strednú hodnotu náhodného vektora  $\xi$ .

Pre daný experiment (teplota, vlhkosť a barometrický tlak ovzdušia) stredná hodnota náhodného vektora  $\xi$  bude:

$$E \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, t_1 - t_0, e_1 - e_0, p_1 - p_0 \\ \vdots \\ 1, t_j - t_0, e_j - e_0, p_j - p_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{t_0, e_0, p} \\ b_{y,t} \\ b_{y,e} \\ b_{y,p} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Za  $t_0$ ,  $e_0$  a  $p_0$  volíme konštantné hodnoty  $t_0 = \frac{\sum t_i}{J}$ ,  $e_0 = \frac{\sum e_i}{J}$  a  $p_0 = \frac{\sum p_i}{J}$ , pričom  $J$  je počet skupín. Pretože jednotlivé merania sú rovnako presné a nezávislé, za  $\sum$  volíme identickú maticu  $\mathbf{I}_v$ . Vektor  $\xi$  je realizovaný cez

$$y = (y_{\cdot 1}, \dots, y_{\cdot j})', \quad (13)$$

kde  $y_{\cdot 1}, \dots, y_{\cdot j}$  sú priemery skupín.

### Výpočet rozptylu odhadu parametrov

Pri predpokladanej normalite vektora  $\xi \sim N(\mathbf{A}\Theta, \sum \sigma^2 \mathbf{H})$  v rámci modelu experimentu, je známa matica  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{H}$ , avšak parameter  $\sigma^2$  je neznámy. Keď označíme:

$$v = \mathbf{A}\hat{\Theta} - \xi = \begin{pmatrix} 1, & t_1 - t_0, & e_1 - e_0, & p_1 - p_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1, & t_j - t_0, & e_j - e_0, & p_j - p_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{y}_{t_0, e_0, p_0} \\ \hat{b}_{y,t} \\ \hat{b}_{y,e} \\ \hat{b}_{y,p} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_{\cdot 1} \\ \vdots \\ y_{\cdot j} \end{pmatrix} = \quad (14)$$

$$= \begin{pmatrix} [y_{t_0, e_0, p_0} + b_{y,t}(t_1 - t_0) + b_{y,e}(e_1 - e_0) + b_{y,p}(p_1 - p_0) - y_{.1}] \\ \vdots \\ [y_{t_0, e_0, p_0} + b_{y,t_j}(t_j - t_0) + b_{y,e_j}(e_j - e_0) + b_{y,p_j}(p_j - p_0) - y_{.j}] \end{pmatrix},$$

kde  $\hat{\Theta} = (\mathbf{A}' \sum^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}' \sum^{-1} \xi$ , potom náhodné vektory  $\mathbf{v}$  a  $\hat{\Theta}$  sú štatisticky nezávislé.

Pre vektor opráv  $\mathbf{v}$  platí:

$$\mathbf{v} = [\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{H}^{-1} - \mathbf{I}]\xi. \quad (15)$$

Ďalej platí:

$$\begin{aligned} & [\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{H}^{-1} - \mathbf{I}]\mathbf{H}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A})^{-1} = \\ & = \mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}'\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A})^{-1} - \mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (16)$$

čo je nutná a dostatočná podmienka pre štatistickú nezávislosť vektorov  $\mathbf{v}$  a  $\hat{\Theta}$ .

V našom prípade nastala situácia, že kovariančná matica vektora  $\xi$  je daná v tvare  $\sum = \sigma^2 \mathbf{H}$ , kde parameter  $\sigma^2$  nie je známy avšak matica  $\mathbf{H}$  známa je. V tomto prípade platí (Kubáčková et al., 1984)

$$\mathbf{v}'\mathbf{H}^{-1}\mathbf{v} = \sigma^2 \chi^2, \quad (17)$$

kde  $\chi$  je náhodná premenná Pearsonovho rozdelenia s  $\chi^2$  s  $(J - n)$  stupňami voľnosti.

Kovariančná matica vektora:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{A}\hat{\Theta} - \mathbf{y} = \left( \mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{H}^{-1} - \mathbf{I} \right) \mathbf{y} \\ \text{má tvar:} \quad \sum \mathbf{v} &= \sigma^2 \left( \mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{H}^{-1} - \mathbf{I} \right) \mathbf{H} \left( \mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A})^{-1} - \mathbf{I} \right) = \\ &= \sigma^2 \left( \mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A})^{-1} - 2\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}' + \mathbf{H} \right) = \\ &= \left( \mathbf{H} - \mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}' \right) \sigma^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Pri výpočte vektora  $\mathbf{v}$ , musí byť splnená podmienka:

$$\mathbf{A}'\mathbf{H}^{-1}\mathbf{v} = 0. \quad (19)$$

Odhad  $\hat{\sigma}^2$  disperzie náhodnej premennej  $\sigma^2$  je možné vypočítať podľa vzťahu [Sokol, 1986]:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{K(\mathbf{v}'\mathbf{v}) + \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (\mathbf{y}_{kj} - \mathbf{y}_{.j})^2}{(K-1)J + (J-4)}, \quad (20)$$

kde  $K$  je počet meraní v jednej skupine,  $J$  je počet meraných skupín,  $\mathbf{y}_{kj}$  je meranie v skupine a  $\mathbf{y}_{.j}$  je priemer skupiny.

Pre 4 komponenty je počet stupňov voľnosti  $(J - 4)$ . Výsledky výpočtu náhodného vektora opráv  $\mathbf{v}$  pre jeden deň experimentu, vykonaného prístrojom Wild T3 dňa 8. – 9. 6. 1976, uvádza (tab. 2).

Prevýšenie medzi stanoviskom a pozorovaným bodom 8. – 9. 6. 1976 bolo merané aj metódou presnej nivelácie (PN). Vzhľadom na túto skutočnosť je možné určiť skutočné chyby medzi skupinovými priermi ( $\mathbf{y}_{.}$ ) a prevýšením z PN a tak isto medzi vyrovnanými skupinovými priermi ( $\mathbf{y}'_{.}$ ) a prevýšením určeným PN. Výsledky experimentu z 8. – 9. 6. 1976 sú uvedené v (tab. 3).

Tab. 2. Výpočtu náhodného vektora  
Tab. 2. Stochastic vector of corrections

| Čas pozor. | Závisle premenná (y.) | Chod regresnej roviny (y'.) | Opravy ( $\hat{v} = y. - y'.$ ) |
|------------|-----------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| [h]        | [m]                   | [m]                         | [mm]                            |
| 1          | 2                     | 3                           | 4                               |
| 7          | 5,8003                | 5,8014                      | -1,1                            |
| 9          | 5,8000                | 5,8006                      | -0,6                            |
| 11         | 5,7990                | 5,7994                      | -0,4                            |
| 13         | 5,7988                | 5,7990                      | -0,2                            |
| 15         | 5,7997                | 5,7988                      | 0,9                             |
| 17         | 5,8008                | 5,8010                      | -0,2                            |
| 19         | 5,8023                | 5,8015                      | 0,8                             |
| 21         | 5,8017                | 5,8024                      | -0,7                            |
| 23         | 5,8032                | 5,8039                      | -0,7                            |
| 1          | 5,8055                | 5,8051                      | 0,4                             |
| 3          | 5,8064                | 5,8049                      | 1,5                             |
| 5          | 5,8053                | 5,8040                      | 1,3                             |
| 7          | 5,8043                | 5,8030                      | 1,3                             |

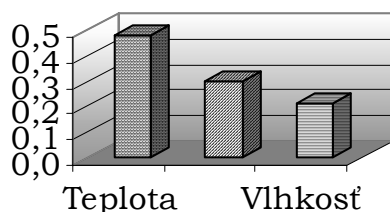
Tab. 3. Výsledky experimentu z 8. – 9. 6. 1976  
Tab. 3. Adjusted group average 8. – 9. 6. 1976

| Čas pozor. | Závisle premenná (y.) | Chod regresnej roviny (y'.) | Prevýšenie merané PN ( $\bar{y}$ ) | Skutočná chyba $\bar{y} - y.$ | Skutočná chyba $\bar{y} - y'.$ |
|------------|-----------------------|-----------------------------|------------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| [h]        | [m]                   | [m]                         | [m]                                | [mm]                          | [mm]                           |
| 1          | 2                     | 3                           | 4                                  | 5                             | 6                              |
| 7          | 5,8003                | 5,8014                      | 5,8021                             | 1,8                           | 0,7                            |
| 9          | 5,8000                | 5,8006                      |                                    | 2,1                           | 1,5                            |
| 11         | 5,7990                | 5,7994                      |                                    | 3,1                           | 2,7                            |
| 13         | 5,7988                | 5,7990                      |                                    | 3,3                           | 3,1                            |
| 15         | 5,7997                | 5,7988                      |                                    | 2,4                           | 3,3                            |
| 17         | 5,8008                | 5,8010                      |                                    | 1,3                           | 1,1                            |
| 19         | 5,8023                | 5,8015                      |                                    | -0,2                          | 0,6                            |
| 21         | 5,8017                | 5,8024                      |                                    | 0,4                           | -0,3                           |
| 23         | 5,8032                | 5,8039                      |                                    | -1,1                          | -1,8                           |
| 1          | 5,8055                | 5,8051                      |                                    | -3,4                          | 3,0                            |
| 3          | 5,8064                | 5,8049                      |                                    | -4,3                          | -2,8                           |
| 5          | 5,8053                | 5,8040                      |                                    | -3,2                          | -1,9                           |
| 7          | 5,8043                | 5,8030                      |                                    | -2,2                          | -0,9                           |

### Kvantifikácia vplyvu skúmaných atmosferických faktorov na presnosť

Pri skúmaní korelačnej závislosti premennej  $y$  na viaceré premenné  $t$ ,  $e$ ,  $p$ , treba poznať nielen rozsah, v ktorom nezávisle premenné spoločne vysvetľujú variabilitu závisle premennej, ale aj individuálny vplyv každej z nich na vysvetlenie tejto variability.

Podiel, akým túto variabilitu vysvetľujú spoločne všetky nezávislé premenné, vyjadríme normovaným regresným koeficientom. Výsledky výpočtu normovaných regresných - koeficientov uvádza (tab. 4).

Obr. 6. Priemerný normovaný regresný koeficient  
Fig. 6. Average standardized regression coefficient

Priemerná hodnota normovaného regresného koeficienta zo všetkých experimentov je graficky zobrazená na (obr. 6).



Tab. 4. Normované regresné koeficienty  
Tab. 4. Standardized regression coefficient

| Dátum merania   | Normovaný regresný koeficient |              |              |
|-----------------|-------------------------------|--------------|--------------|
|                 | Teplota                       | Tlak         | Vlhkosť      |
|                 | [%]                           | [%]          | [%]          |
| 1               | 2                             | 3            | 4            |
| 8. – 9. 6. 1976 | 48,10                         | 31,79        | 20,11        |
| 2. – 3. 1977    | 46,80                         | 27,03        | 26,17        |
| 17. 5. 1977     | 47,06                         | 27,61        | 25,33        |
| 6. 11. 1978     | 52,72                         | 25,03        | 22,25        |
| 24. 6. 1980     | 47,58                         | 33,41        | 19,01        |
| 12. 7. 1983     | 44,90                         | 32,03        | 23,07        |
| 5. 3. 1990      | 48,21                         | 29,67        | 22,12        |
| 15. 8. 1992     | 56,37                         | 29,87        | 13,76        |
| 8. 7. 1994      | 53,21                         | 27,93        | 18,86        |
| 15. 5. 1996     | 41,29                         | 27,01        | 31,70        |
| 12. 4. 1997     | 49,83                         | 35,24        | 14,93        |
| 6. 11. 1998     | 40,21                         | 36,70        | 23,09        |
| 12. 2. 1999     | 52,72                         | 31,06        | 16,22        |
| <b>Priemer</b>  | <b>48,38</b>                  | <b>30,34</b> | <b>21,28</b> |

### Záver

Všeobecne sa uznáva, že prostredie, v ktorom je meranie vykonávané ovplyvňuje výsledky geodetických meraní a eliminácia jeho vplyvu sa v súčasnosti javí ako jedna z ciest na ďalšie zvyšovanie presnosti výsledkov merania.

Prostredie nepôsobí len na merací proces, ale aj na samotné objekty. Vplyv prostredia, najmä zmien atmosférických podmienok na merací proces a sledované objekty sa snažíme zachytiť rozličnými pozorovaniami a meraniami jednak na modeloch, ale predovšetkým priamo na stavebných objektoch v teréne. Dobre organizované a usporiadané merania umožnia posúdiť zmeny v správaní sa objektov v danom prostredí a predvídať ich budúce stavy, čo má značný teoretický a praktický význam.

V predloženom príspevku bol preskúmaný vplyv zmien atmosférických podmienok, najmä zmien teploty, vlhkosti a barometrického tlaku ovzdušia na presnosť výsledkov geodetických meraní. Teoretické riešenie a vypracované matematicko-štatistické modely na vyhodnotenie výsledkov súboru meraní, ovplyvnených prostredím merania boli v rokoch 1975-2000 overené experimentálnymi meraniami na troch rozdielnych lokalitách.

Odhad závislosti skúmaných faktorov bol vykonaný lineárnou regresiou. Na regresný odhad bola volená kvadratická forma závislosti regresnej funkcie s tromi nezávislými premennými (teplota, vlhkosť a tlak ovzdušia). Výsledky výpočtu kovariančných matíc zo skúmaných experimentov sú uvedené v tab. 3, kde je možné vidieť, že regresná rovina dobre vystihuje priebeh skupín a že typ lineárnej regresnej funkcie bol vhodne volený.

Pri skúmaných experimentoch bol ďalej vyšetrený vplyv nezávisle premenných faktorov na variabilitu závisle premennej. Z porovnania  $\beta$  - koeficientov (tab. 4) vyplýva, že zo skúmaných faktorov najväčší vplyv na variabilitu závisle premennej má teplota ovzdušia – v priemere 48,4 %, potom barometrický tlak – v priemere 30,3 % a relatívna vlhkosť ovzdušia v priemere 21,3 %. Priemerné hodnoty normovaného regresného koeficienta sú graficky znázornené na obr. 6.

Z vyhodnotených experimentálnych meraní vyplýva, že variabilita výsledkov merania v rámci skupín okolo skupinového priemeru je menšia ako variabilita skupinových priemerov okolo celodenného priemeru.

Záverom môžeme konštatovať, že výsledky vyhodnotených experimentov potvrdili, že zmeny atmosférických podmienok ovplyvňujú presnosť výsledkov geodetických meraní. Z toho vyplýva, že pri vyhodnotení súboru meraní, realizovaných v rôznych atmosférických podmienkach, treba vplyv zmien meteorologických prvkov uvažovať a to nielen pri hodnotení presnosti výsledkov meraní, ale aj pri posudzovaní charakteru, priebehu a veľkosti zistených zmien v správaní sa skúmaného javu, alebo objektu. V opačnom prípade môžeme dôjsť k nesprávnym záverom v správaní sa sledovaného objektu. Všeobecne nemôžeme úplne vplyv prostredia vylúčiť z výsledkov merania, je možné však tieto fiktívne zmeny vo výsledkoch merania obmedziť vhodnou voľbou termínu merania, sledovaním zmien atmosférických, alebo iných fyzikálnych činiteľov, ovplyvňujúcich prostredie merania. Objektívne rozbor výsledkov meraní, môžeme získať len dobre organizovaným, dlhodobým, systematickým pozorovaním skúmaných javov a objektov.

Článek je součástí řešení grantové úlohy ev. č.: 1/1153/04.

### Literatúra – References

- Hradilek, V.: Vysokohorská geodézie. *Academia, Praha 1984.*
- Kubáček, L.: Základy teórie odhadu, *VEDA, Bratislava 1983.*
- Kubáčková L., Kubáček, L.: Test na overenie lineárnej hypotézy o parametroch v lineárnom regresnom modeli. *Geodetický a kartografický obzor, 1984, č. 9.*
- Michalčák, O., Sokol, Š.: Vplyv atmosférických podmienok na trigonometrické meranie výšok v inžinierskej geodézii. *Geodetický a kartografický obzor 1981, č. 3.*
- Schauerte, W., Witte, B.: Aspekte zur experimentellen Bestimmung des Brechungsindex der Atmosphäre. *Zeitschrift für Vermessungswesen (ZfV), 119, 1994, č. 9.*
- Schwarz, W.: Zur Ermittlung der integralen Temperatur der Atmosphäre mit Ultraschall für Refraktionsbestimmungen in Nahbereich. [*Dissertation*] *Veröff. Des Geod. Inst. der RWTH Aachen, n. 38, 1985.*
- Sokol, Š., Villim, A.: Eliminácia vplyvu prostredia na trigonometrické meranie výšok. *In.: Aktuálne otázky meračstva a inžinierskej geodézie. Herľany 2000.*
- Sokol, Š., Villim, A.: Určenie vertikálnej refrakcie z meraní v lokálnej geodetickej sieti. *In.: Geodézia, fotogrametria a inžinierska geodézia v informačnej spoločnosti. Bratislava, Katedra geodézie SvF STU 2001.*
- Sokol, Š., Villim, A.: Reduction of the effect of vertical refraction in the trigonometric determination of elevations. *Slovak Journal of Civil Engineering. Volume IX, 2001, No 1-2.*
- Sokol, Š.: Eliminácia vplyvu prostredia na trigonometrické meranie výšok. *In.: Zborník prác z konferencie „Problematika geodetických sietí pri budovaní energetických diel“. Bratislava, P-ČSVTS 1984.*
- Sokol, Š.: Určovanie refrakcie pri trigonometrickom meraní výšok v inžinierskej geodézii. *In.: Zborník vedeckých prác Stavebnej fakulty, Alfa 1981.*
- Sokol, Š.: Vlivy zmeny atmosférických uslovij na točnost trigonometričeskovo izmerenija vysot. *In.: Zborník prác „Medzinárodná vedecká konferencia VIAS“, Sofia 1984.*
- Sokol, Š.: Vplyv atmosférických podmienok na trigonometrické meranie výšok. *dizertačná práca KDP, STU, Bratislava 1976.*
- Vitásek, J.: Vliv prostředí na přesnost' převýšení určovaného trigonometricky. *In.: Zborník referátov 50. výročie, STU, Bratislava, 1988.*
- Vondrák, J.: Laserová měření využívající zrcadlové symetrie. *dizertačná práca ,DOP. VUT Brno, 2001.*
- Weiss, G.: Spracovanie geodetických štruktúr zameraných súradnicami. *Monografia. Vydavateľstvo Štrotfek. Košice, 1998.*
- Weiss, G.: Trigonometrické určenie výšok a refrakčných parametrov v inžinierskej geodézii. *Geodetický a kartografický obzor. 37 (79), 1991, č. 7.*
- Witte, B., Deusen, D., Casolt, N.: Současné metody pro určení geodetické refrakce při pozemních přesných měřeních. *Geodetický a kartografický obzor. 47 (89), 2001, č. 2.*
- Witte, B.: Möglichkeiten und Grenzen des trigonometrischen Nivellements. *VR, 52, 1990, n. 2+3.*