

Odhad variančných komponentov z meraní v geodetickej sieti

Marek Bajtala¹ a Štefan Sokol²

Estimation of variance components from the measurement in a geodetic network

The precision of geodetic instruments used for precise measurements in geodetic networks is described by the dispersion σ^2 or the standard deviation σ . Some of geodetic instruments, like electro optic range-finder and its accuracy are characterized by the formule:

$$\sigma = \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 \beta.$$

The estimation methods of the parameters \mathcal{G}_1 and \mathcal{G}_2 from the data acquired by geodetic measurements on the geodetic baseline. Methods and mathematical models of these parameters estimation (variance coefficients) directly from the measuring experiment in the geodetic network with the estimate of indeterminateness are presented together with the comparison of achieved results of estimates by the mentioned methods.

Key words: variance components, estimate of variance components, LMVQUIE-(locally minimum variance quadratic unbiased invariant estimator), covariance matrix, criterion matrix.

Úvod

Presnosť geodetických prístrojov využívaných pri presnom meraní v geodetických sieťach je možné charakterizovať jednoducho disperziou σ^2 , respektíve štandardnou odchýlkou σ . U niektorých geodetických prístrojov, ako je napríklad elektrooptický diaľkomer nám štandardná odchýlka σ nepopisuje dostatočne príslušnú charakteristiku dĺžkového merania, ale je vyjadrená vzťahom:

$$\sigma = \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 \beta. \quad (1)$$

kde β je meraná vzdialenosť a \mathcal{G}_1 a \mathcal{G}_2 (variančné komponenty) sú charakteristiky presnosti, a to súčtová (adičná) konštanta a násobná (multiplikačná) konštanta prístroja.

Parametre \mathcal{G}_1 a \mathcal{G}_2 je možné určovať dvoma spôsobmi. Buď realizáciou pomocného experimentu, ktorého cieľom je odhad uvedených parametrov alebo odhad je možné získať priamo z konkrétneho experimentu, pri ktorom bol príslušný prístroj použitý.

V prvom prípade sa v geodetickej praxi využíva spôsob testovania charakteristík prístroja na geodetickej základnici, ktorá je určená rádovo presnejšie ako je presnosť testovaného prístroja, prípadne realizujeme pomocný experiment. Keďže testovanie na základnici sa vykonáva pre určitý prístroj v určitých časových intervaloch a pomocný experiment zvyšuje náklady a časové nároky, v súčasnej dobe pri používaní čoraz presnejších prístrojov sa javí spôsob priameho odhadu z hľadiska korektnosti dosiahnutých výsledkov ako najvhodnejší. Prezentované výsledky sa týkajú hlavne odhadu variančných komponentov prístroja Trimble 3602 v konkrétnej situácii polohovej siete, kde bol použitý prístroj Trimble 3602 a porovnania s výsledkami získanými testovaním na základnici.

Odhad charakteristík presnosti prístroja meraním na základnici

Pri plánovaní, návrhu alebo projekte experimentu je potrebné vychádzať zo znalosti meracích prístrojov, techniky, ktoré je možné v experimente použiť, z požiadavky dosiahnuť stanovený cieľ s čo najmenším počtom meraní a v neposlednom rade z požiadavky na presnosť výsledkov. Keďže väčšina geodetických meraní sa vykonáva v rôznych poveternostných podmienkach s rôznymi typmi prístrojov, je nutné pre dosiahnutie spoľahlivých výsledkov využívať meraciu techniku, ktorej parametre sú dostatočne dobre známe. Vidieť teda, že v praxi pri presných meraniach je potrebné preverovať napr. hodnotu σ dĺžkového merania z certifikátu prístroja vhodným súborom údajov. Jednou z možností testovania je vykonanie experimentálneho merania na testovacej základnici.

Pri testovaní prístroja na základnici ide o meranie dĺžok vo všetkých kombináciách, ktoré umožňujú získať informácie o presnosti použitého prístroja a parametroch odrazového systému. Na základe nameraných hodnôt

¹ Ing. Marek Bajtala, Katedra geodézie SvF STU Bratislava, Radlinského 11 813 68 Bratislava, marek.bajtala@stuba.sk

² prof. Ing. Štefan Sokol, PhD., Katedra geodézie SvF STU Bratislava, Radlinského 11 813 68 Bratislava, stefan.sokol@stuba.sk
(Recenzovaná a revidovaná verzia dodaná 11. 4. 2005)

sa realizuje odhad neznámych parametrov sprostredkujúcich meraní metódou najmenších štvorcov (MNS). Hodnoty neznámych parametrov predstavujú skutočné dĺžky medzi jednotlivými piliermi základnice, ako aj adičná konštanta použitého odrazového systému. Tieto sú ďalej využité v ďalšom výpočte odhadu diaľkomernej rovnice regresnou analýzou. Regresná analýza určuje závislosť medzi meranými dĺžkami $\tilde{\mathbf{s}}$ a odchýlkami vyrovnaných dĺžok $\hat{\mathbf{s}}$ s danými dĺžkami \mathbf{S}^* základnice, ktoré sú realizované minimálne o rád presnejšie.

Regresná závislosť je daná vzťahom:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{s} \quad , \quad (2)$$

kde \mathbf{k} je násobná konštanta (smernica kalibračnej priamky)

$$\mathbf{k} = \frac{\sum (\hat{\mathbf{s}}_i - \hat{\mathbf{s}}_{PR})(\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_{PR})}{\sum (\hat{\mathbf{s}}_i - \hat{\mathbf{s}}_{PR})^2}, \quad i = 1, \dots, n \quad , \quad (3)$$

a \mathbf{q} predstavuje hodnotu posunu na osi y:

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q}_{PR} - \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{s}}_{PR} \quad , \quad (4)$$

\mathbf{Q}_{PR} predstavuje adičnú konštantu,

$$\mathbf{Q}_{PR} = \sum \frac{\mathbf{Q}_i}{n} \quad , \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{s}}_{PR} = \sum \frac{\hat{\mathbf{s}}_i}{n} \quad , \quad (6)$$

kde $\mathbf{Q}_i = \mathbf{S}_i^* - \hat{\mathbf{s}}_i$.

Získaný výsledný tvar kalibračnej rovnice charakterizuje presnosť merania dĺžok testovaného geodetického prístroja.

Iný spôsob určenia tvaru kalibračnej rovnice diaľkomera je výpočet pomocou metódy MNS, kde na základe výpočtu vektora opráv

$$\mathbf{v} = \mathbf{X}\mathcal{G} + l \quad , \quad (7)$$

je možné vypočítať aj charakteristiky presnosti $\text{var}(\hat{\mathcal{G}})$ odhadu komponentov $\hat{\mathcal{G}}$ kalibračnej rovnice.

Matica \mathbf{X} je tvorená deriváciami rovníc opráv a vektor l predstavuje vektor absolútnych členov (rozdiel odhadnutých dĺžok $\hat{\mathbf{s}}$ a daných dĺžok základnice \mathbf{S}^*).

Pre jednotkovú strednú chybu odhadu potom platí:

$$m_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}{n-k}} \quad , \quad (8)$$

kde $n - k$ je počet stupňov voľnosti.

Pre výslednú variačno - kovariančnú maticu potom platí:

$$\text{var}(\hat{\mathcal{G}}) = m_0^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \quad . \quad (9)$$

Metóda odhadu variančných komponentov priamo meraných údajov v geodetickej sieti

Ďalšou možnosťou určenia charakteristík prístroja, je metóda odhadu charakteristík prístroja priamo z merania v geodetickej sieti.

Pri teoretickom modeli odhadu variančných komponentov priamo meraných údajov je základným predpokladom regularita modelu

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad , \quad (10)$$

normalita observačného vektora \mathbf{Y} a znalosť kovariančnej matice $\text{Va}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\Sigma}$.

Štruktúra kovariančnej matice $\boldsymbol{\Sigma}$ závisí na tom, či bol v experimente použitý jeden alebo viacej prístrojov, prípadne či charakteristiku prístroja je možné popísať jednou alebo viacerými charakteristikami presnosti. Keďže pri meraní v geodetických sieťach sa využívajú na meranie dĺžok diaľkomery, ktorých charakteristika presnosti sa vyjadruje pomocou dvoch zložiek presnosti (variančných komponentov) $\sigma = \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 \boldsymbol{\beta}$, prípadne sa dĺžkové meranie kombinuje s uhlovým meraním, tak je potrebné štruktúru kovariančnej matice upraviť do nasledovného tvaru

$$\Sigma = \mathbf{V}_0 + \sum_{i=1}^p \mathcal{G}_i \mathbf{V}_i \quad (11)$$

parametre $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_p$ sú charakteristiky presnosti použitých prístrojov (variančné komponenty) a $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_p$ sú známe symetrické matice.

Pri poznaní približnej hodnoty prvkov vektora \mathcal{G} , je možné uvedenú štruktúru kovariančnej matice (11) získať linearizáciou kovariančnej matice $\Sigma(\mathcal{G})$;

$$\Sigma(\mathcal{G}) = \Sigma(\mathcal{G}_0) + \sum_{i=1}^p (\partial \Sigma(\mathcal{G}) / \partial \mathcal{G}_i |_{\mathcal{G}=\mathcal{G}_0}) \delta \mathcal{G}_i, \quad (12)$$

pričom

$$\Sigma(\mathcal{G}_0) = \mathbf{V}_0, \mathbf{V}_i = \partial \Sigma(\mathcal{G}) / \partial \mathcal{G}_i |_{\mathcal{G}=\mathcal{G}_0},$$

$$\mathcal{G}_0^T = (\mathcal{G}_{0,1}, \dots, \mathcal{G}_{0,p})^T, \delta \mathcal{G}_i = \mathcal{G}_i - \mathcal{G}_{0,i}, \quad i = 1, \dots, p.$$

V prípade, neznámych približných hodnôt variančných komponentov $\mathbf{V}_0 = \mathbf{0}$.

Keďže v mnohých prípadoch sú variančné komponenty kladné a matice $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_p$ aspoň pozitívne semidefinitné, tak je možné použiť Raoov postup (Rao, 1978) odhadu vektora \mathcal{G} bez hlbších poznatkov vlastností distribučnej funkcie observačného vektora \mathbf{Y} , ktorý je popísaný v (Kubáček, 2000). Jedná sa o typ odhadu MINIQUE (minimum norm quadratic unbiased estimator).

Takýto model merania je možné teda zapísať vo forme:

$$\mathbf{Y} \sim_n (\mathbf{X}\beta, \sigma_1^2 \mathbf{V}_1 + \sigma_2^2 \mathbf{V}_2 + \dots + \sigma_p^2 \mathbf{V}_p), \quad \beta \in R^k, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_p^2 \in (0, \infty), \quad (13)$$

kde symbol \mathbf{Y} označuje n -rozmerný náhodný vektor (observačný vektor), ktorého realizáciou vzniká súbor meraných údajov. Stredná hodnota má tvar $E(\mathbf{Y} | \beta) = \mathbf{X}\beta$, matice \mathbf{X} s rozmermi $n \times k$ je známa a k -rozmerný vektor β je tvorený cieľovými parametrami experimentu.

Kovariančná matice

$$\text{var}(\mathbf{Y} | \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_p^2) = \sigma_1^2 \mathbf{V}_1 + \sigma_2^2 \mathbf{V}_2 + \dots + \sigma_p^2 \mathbf{V}_p \quad (14)$$

má výsledný tvar podľa použitých prístrojov, res. podľa počtu variančných komponentov, ktoré charakterizujú disperzie $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_p^2$ v registrácii použitých prístrojov a $n \times n$ -rozmerné matice $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_p$ sú dané projektom merania v geodetickej sieti. Pre takýto model existuje nestranný, invariantný, kvadratický odhad s minimálnou normou (MINQUE) parametrov $\hat{\mathcal{G}} = (\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \dots, \hat{\sigma}_p^2)^T$, ktorý je daný vzťahom

$$\hat{\mathcal{G}} = \mathbf{S}_{(M_X \Sigma_0 M_X)^+}^{-1} (\mathbf{a} - \mathbf{b}), \quad (15)$$

pri dodržaní podmienky, že matice $\mathbf{S}_{(M_X \Sigma_0 M_X)^+}$ je regulárna.

Pre prvky matice $\mathbf{S}_{(M_X \Sigma_0 M_X)^+}$ platí:

$$\{\mathbf{S}_{(M_X \Sigma_0 M_X)^+}\}_{i,j} = \text{Tr}[(\mathbf{M}_X \Sigma_0 \mathbf{M}_X)^+ \mathbf{V}_i (\mathbf{M}_X \Sigma_0 \mathbf{M}_X)^+ \mathbf{V}_j], \quad i, j = 1, 2, \dots, p. \quad (16)$$

$(\mathbf{M}_X \Sigma_0 \mathbf{M}_X)^+$ vyjadruje Mooreovu-Penroseovu g-inverziu matice $(\mathbf{M}_X \Sigma_0 \mathbf{M}_X)$.

Podrobnejší rozpis uvádza kapitola IV.1 v publikácii (Kubáček, 2000):

$$(\mathbf{M}_X \Sigma_0 \mathbf{M}_X)^+ = \Sigma_0^{-1} - \Sigma_0^{-1} \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \Sigma_0^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \Sigma_0^{-1}, \quad (17)$$

kde $\mathbf{M}_X = \mathbf{I} - \mathbf{X}\mathbf{X}^+$, \mathbf{I} je jednotková matice.

Pre matice Σ_0 platí

$$\Sigma_0 = \sigma_{1,0}^2 \mathbf{V}_1 + \sigma_{2,0}^2 \mathbf{V}_2 + \dots + \sigma_{p,0}^2 \mathbf{V}_p, \quad (18)$$

pričom vektor $(\sigma_{1,0}^2, \sigma_{2,0}^2, \dots, \sigma_{p,0}^2)^T$ predstavuje približné hodnoty variančných komponentov (jednotlivých disperzií), popisujúcich charakteristiky prístrojov.

Ďalej vo výraze (15) platí:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}^T (\mathbf{M}_X \boldsymbol{\Sigma}_0 \mathbf{M}_X)^+ \mathbf{V}_1 (\mathbf{M}_X \boldsymbol{\Sigma}_0 \mathbf{M}_X)^+ \mathbf{Y} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}^T (\mathbf{M}_X \boldsymbol{\Sigma}_0 \mathbf{M}_X)^+ \mathbf{V}_p (\mathbf{M}_X \boldsymbol{\Sigma}_0 \mathbf{M}_X)^+ \mathbf{Y} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \text{Tr}[(\mathbf{M}_X \boldsymbol{\Sigma}_0 \mathbf{M}_X)^+ \mathbf{V}_1 (\mathbf{M}_X \boldsymbol{\Sigma}_0 \mathbf{M}_X)^+ \mathbf{V}_0] \\ \vdots \\ \text{Tr}[(\mathbf{M}_X \boldsymbol{\Sigma}_0 \mathbf{M}_X)^+ \mathbf{V}_p (\mathbf{M}_X \boldsymbol{\Sigma}_0 \mathbf{M}_X)^+ \mathbf{V}_0] \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Pomocou týchto vzťahov je možné odhadnúť hľadané parametre variančných komponentov (disperzií prístrojov), ak sú zrejmé ich približné hodnoty ($\mathbf{V}_0 \neq \mathbf{0}$). Ak približné hodnoty nie sú známe, potom približné hodnoty sú nulové ($\mathbf{V}_0 = \mathbf{0}$) a odhad hľadaných parametrov je vypočítaný na základe vzťahu

$$\hat{\mathcal{G}} = \mathbf{S}_{(M_X \Sigma_0 M_X)^+}^{-1} \mathbf{a}. \quad (21)$$

Ak náhodný vektor \mathbf{Y} má normálne rozdelenie pravdepodobnosti, môžeme vypočítať kovariančnú maticu odhadnutého vektora variančných koeficientov:

$$\text{var}(\hat{\mathcal{G}}) = 2\mathbf{S}_{(M_X \Sigma_0 M_X)^+}^{-1}. \quad (22)$$

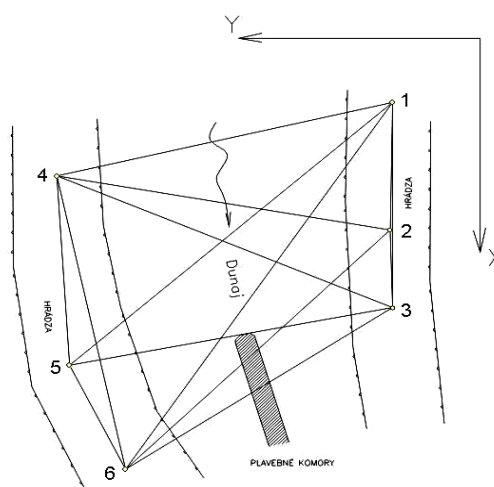
V prípade voľby približných hodnôt variančných komponentov nenulových, alebo ak nie sú dostatočne známe, je potrebné vykonávať výpočet pomocou postupných iterácií. Prvé vypočítané hodnoty $\hat{\mathcal{G}}_i$ vstupujú do výpočtu druhej iterácie ako približné hodnoty variančných komponentov a do výpočtu ďalších iterácií vstupuje ako približná hodnota odhad z predošlej iterácie, až dovtedy kým sa nedosiahne zhoda dvoch za sebou idúcich iterácií. Vtedy výpočet končí. V niektorých prípadoch sa postup iterácie môže voliť tak, že jeden variančný koeficient zostáva nemenný a iteráciami odhadujeme ďalšie variančné komponenty, následne sa iteráciami vypočíta ten koeficient, ktorý bol považovaný za nemenný.

Numerické riešenie odhadu variančných komponentov

Numerické riešenie odhadu variančných komponentov priamo z meraní v geodetickej sieti metódou LMVQUIE budeme aplikovať na geodetickej sieti v lokalite Gabčíkovo.



Obr. 1. Lokalita VD Gabčíkovo
Fig. 1. VD Gabčíkovo



Obr. 2. Konfigurácia geodetickej siete
Fig. 2. Configuration of the geodetic network

Daná geodetická sieť pozostáva zo šiestich bodov (obr. č. 2). Medzi týmito bodmi boli merané horizontálne dĺžky prístrojom Trimble 3602 DR, ktorého dĺžková presnosť udávaná výrobcom je $m_d = 2\text{mm} + 2\text{ppm}$. Cieľom je teda overiť dĺžkovú presnosť použitého prístroja a následne výpočet odhadu súradníc bodov v danej geodetickej sieti.

V danej konfigurácii siete sme si zvolili počiatok v bode č. 1 a kladná os X prechádza bodom č. 3. Z uvedeného vyplýva že sa jedná o spracovanie bezvázbovej siete, kde máme známe súradnice bodu č. 1 ($Y_1=1000,000\text{ m}$, $X_1=1000,000\text{ m}$) a Y-ovú os bodu č. 3 ($Y_3=1000,000\text{ m}$).

Tab. 1. Merané dĺžky v geodetickej sieti VD Gabčíkovo

Tab. 1. Measured distances in the geodetic network of VD Gabčíkovo

Označenie bodov dĺžky	meraná dĺžka [m]	Označenie bodov dĺžky	meraná dĺžka [m]	Označenie bodov dĺžky	meraná dĺžka [m]	Označenie bodov dĺžky	meraná dĺžka [m]
1-6	1145,4411	2-1	329,1212	6-2	888,7546	5-6	300,3780
1-4	833,2666	2-3	200,3126	6-5	300,3773	5-4	489,6318
1-3	529,2922	3-6	768,3579	6-4	774,8470	4-2	817,5010
1-2	329,1217	3-4	879,6796	6-1	1145,4452	4-6	774,8477
1-5	1034,0912	3-2	200,3136	6-3	768,3583	4-5	489,6313
2-6	888,7513	3-1	529,2931	5-1	1034,0938	4-1	833,2686
2-4	817,4983	3-5	794,7070	5-3	794,7064	4-3	879,6789

Vektor neznámych parametrov $\beta_{(9 \times 1)} = (Y_2, X_2, X_3, Y_4, X_4, Y_5, X_5, Y_6, X_6)^T$, kde približné súradnice $\beta_{0(9 \times 1)}$ určené z dĺžok meraných diaľkometerom (tab. 1) sú uvedené v tab. 2.

Tab. 2. Približné hodnoty súradníc geodetickej siete

Tab. 2. Approximate coordinates of geodetic network

Y ₀₂ [m]	X ₀₂ [m]	X ₀₃ [m]	Y ₀₄ [m]	X ₀₄ [m]	Y ₀₅ [m]	X ₀₅ [m]	Y ₀₆ [m]	X ₀₆ [m]
1005,978	1329,068	1529,292	1811,423	1189,543	1780,631	1678,204	1645,305	1946,365

Tab. 3. Parciálne derivácie funkčných vzťahov dĺžok

Tab. 3. Partial derivations of the distance functions

Neznáma ozn. dĺžky	Y ₀₂	X ₀₂	X ₀₃	Y ₀₄	X ₀₄	Y ₀₅	X ₀₅	Y ₀₆	X ₀₆
1-6	0	0	0	0	0	0	0	+0,5634	+0,8262
1-4	0	0	0	+0,9738	+0,2275	0	0	0	0
1-3	0	0	+1,0000	0	0	0	0	0	0
1-2	+0,0181	+0,9998	0	0	0	0	0	0	0
1-5	0	0	0	0	0	+0,7549	+0,6558	0	0
2-6	-0,7194	-0,6946	0	0	0	0	0	+0,7194	+0,6946
2-4	-0,9853	+0,1707	0	+0,9853	-0,1707	0	0	0	0
2-1	+0,0182	+0,9998	0	0	0	0	0	0	0
2-3	+0,0298	-0,9996	+0,9996	0	0	0	0	0	0
3-6	0	0	-0,5428	0	0	0	0	+0,8398	+0,5428
3-4	0	0	+0,3862	+0,9224	-0,3862	0	0	0	0
3-2	+0,0298	-0,9996	+0,9996	0	0	0	0	0	0
3-1	0	0	+1,0000	0	0	0	0	0	0
3-5	0	0	-0,1874	0	0	+0,9823	+0,1874	0	0
6-2	-0,7194	-0,6946	0	0	0	0	0	+0,7194	+0,6946
6-5	0	0	0	0	0	+0,4505	-0,8928	-0,4505	+0,8928
6-4	0	0	0	+0,2144	-0,9767	0	0	-0,2144	+0,9767
6-1	0	0	0	0	0	0	0	+0,5634	+0,8262
6-3	0	0	-0,5428	0	0	0	0	+0,8399	+0,5428
5-1	0	0	0	0	0	+0,7549	+0,6558	0	0
5-3	0	0	-0,1874	0	0	+0,9823	+0,1874	0	0
5-6	0	0	0	0	0	+0,4505	-0,8928	-0,4505	+0,8928
5-4	0	0	0	-0,9980	+0,0629	-0,0629	+0,9980	0	0
4-2	-0,9853	+0,1707	0	+0,9853	-0,1707	0	0	0	0
4-6	0	0	0	+0,2144	-0,9767	0	0	-0,2144	+0,9767
4-5	0	0	0	-0,9980	+0,0629	-0,0629	+0,9980	0	0
4-1	0	0	0	+0,9738	+0,2275	0	0	0	0
4-3	0	0	+0,3862	+0,9224	-0,3862	0	0	0	0

Pre zvolené hodnoty približných súradníc $\beta_{0(9 \times 1)}$ z funkčného vzťahu

$$s_{0,ji} = \sqrt{(Y_{0i} - Y_{0j})^2 + (X_{0i} - X_{0j})^2} \quad (23)$$

dostaneme maticu parciálnych derivácií $\mathbf{X}_{(28 \times 9)}$, pre jednotlivé dĺžky podľa jednotlivých neznámych, ktoré sú uvedené v tab. 3.

V ďalšej časti si zadefinujeme vstupné matice $\Sigma_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$, potrebné pre výpočet odhadu hodnôt variančných komponentov použitého prístroja. Pre diagonálne prvky vstupných kovariančných matíc platí:

$$\begin{aligned} \{\Sigma_0\}_{i,i} &= (a_0 + b_0 s_{0i})^2, \\ \{\mathbf{V}_1\}_{i,i} &= 2(a_0 + b_0 s_{0i}), \\ \{\mathbf{V}_2\}_{i,i} &= 2s_{0i}(a_0 + b_0 s_{0i}) \end{aligned}$$

a mimodiagonálne prvky $\{\Sigma_0\}_{i,j} = \{\mathbf{V}_1\}_{i,j} = \{\mathbf{V}_2\}_{i,j} = \mathbf{0}$, pričom $i,j = 1, \dots, 28$,

kde ako približné charakteristiky prístroja udávame $a_0 = 2\text{mm}$, $b_0 = 2\text{ppm}$, ktoré uvádza výrobca. Potom jednotlivé matice majú nasledovné diagonálne prvky (tabuľka č. 4):

Tab. 4. Prvky vstupných matíc
Tab. 4. Elements of input matrices

Označenie dĺžky	$\{\Sigma_0\}_{i,i}$ [m ²]	$\{\mathbf{V}_1\}_{i,i}$ [m]	$\{\mathbf{V}_2\}_{i,j}$ [m]
1-6	1,841167005e-05	8,581764400e-03	9,829905654e+00
1-4	1,344346571e-05	7,333066400e-03	6,110399307e+00
1-3	9,354938532e-06	6,117168800e-03	3,237769732e+00
1-2	7,066257974e-06	5,316486800e-03	1,749771174e+00
1-5	1,655010804e-05	8,136364800e-03	8,413743240e+00
2-6	1,426952589e-05	7,555005200e-03	6,714520693e+00
2-4	1,321320028e-05	7,269993200e-03	5,943207082e+00
2-1	7,066252657e-06	5,316484800e-03	1,749767857e+00
2-3	5,763001351e-06	4,801250400e-03	9,617509509e-01
3-6	1,250835865e-05	7,073431600e-03	5,434927050e+00
3-4	1,413278159e-05	7,518718400e-03	6,614063195e+00
3-2	5,763010953e-06	4,801254400e-03	9,617565534e-01
3-1	9,354949543e-06	6,117172400e-03	3,237777143e+00
3-5	1,288389286e-05	7,178828000e-03	5,705064863e+00
6-2	1,426957576e-05	7,555018400e-03	6,714557356e+00
6-5	6,763924489e-06	5,201509200e-03	1,562415289e+00
6-4	1,260032749e-05	7,099388000e-03	5,500939494e+00
6-1	1,841174042e-05	8,581780800e-03	9,829959625e+00
6-3	1,250836431e-05	7,073433200e-03	5,434931109e+00
5-1	1,655015035e-05	8,136375200e-03	8,413775149e+00
5-3	1,288388425e-05	7,178825600e-03	5,705058649e+00
5-6	6,763931772e-06	5,201512000e-03	1,562419772e+00
5-4	8,876011598e-06	5,958527200e-03	2,917484398e+00
4-2	1,321323954e-05	7,270004000e-03	5,943235540e+00
4-6	1,260033743e-05	7,099390800e-03	5,500946633e+00
4-5	8,876005640e-06	5,958525200e-03	2,917480440e+00
4-1	1,344349504e-05	7,333074400e-03	6,110420639e+00
4-3	1,413277107e-05	7,518715600e-03	6,614055468e+00

Po zadefinovaní vstupných matíc môžeme podľa vzťahov z predošlej kapitoly pristúpiť k samotnému odhadu variančných komponentov iteráčnym spôsobom, ich charakteristik presnosti a následne aj z odhadnutými variančnými koeficientmi odhadnúť neznáme súradnice bodov geodetickej siete. Výsledné matice sú uvádzané v metroch.

Odhad kritériálnej matice $\mathbf{S}_{(M_X \Sigma_0 M_X)^+}$ a jej inverznej matice po 7. iterácii, kedy $\hat{\mathcal{G}} / \mathcal{G} = 1$ má tvar:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{(M_X \Sigma_0 M_X)^+} &= \begin{pmatrix} 80986694,1676027 & 41982546632,7774 \\ 41982546632,7774 & 27695070156433,7 \end{pmatrix}, \ddot{a} \\ \mathbf{S}_{(M_X \Sigma_0 M_X)^+}^{-1} &= \begin{pmatrix} 5,76502665589393e-08 & -8,73911851651499e-11 \\ -8,73911851651499e-11 & 1,68582512343085e-13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a odhad vektora ($\mathbf{a} - \mathbf{b}$) je

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} -44,1082259416798 \\ 9767,18370350078 \end{pmatrix}.$$

Výsledný odhad variančných komponentov a charakteristiky presnosti odhadu po 7 iterácii je

$$\hat{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} 0,0027 \\ 0,00000123 \end{pmatrix}, \quad \text{var}(\hat{\mathcal{G}}) = \begin{pmatrix} +1,1e-7 & -1,8e-10 \\ -1,8e-10 & +3,3e-13 \end{pmatrix}.$$

Ako je vidieť, odhad variančných komponentov prístroja v geodetickej sieti sa odlišuje od charakteristík prístroja, ktoré udáva výrobca. Posledným krokom numerického riešenia je výpočet odhadu neznámych parametrov (súradníc bodov siete) pomocou 2 lineárneho modelu, pričom vstupná kovariančná matica bude vypočítaná pomocou odhadnutých variančných komponentov $\hat{\mathcal{G}}$.

Praktické aplikácie odhadu charakteristík presnosti

Pri vyhodnotení výsledkov merania v geodetickej sieti, ako aj pre ďalšiu analýzu a interpretáciu dosiahnutých výsledkov (určenie konfidenčných oblastí, testovanie hypotéz a určenie prahových oblastí) je dôležité poznať výslednú kovariančnú maticu. Na získanie čo najkvalitnejších prvkov výslednej kovariančnej matice je potrebné realizovať kvalitné meranie, ktoré má normálne rozdelenie chýb, ale hlavne je nutné poznať vstupné charakteristiky použitých prístrojov pre experimentálne meranie.

Prezentované experimentálne meranie boli vykonané v dvoch lokalitách. Cieľom bolo určenie charakteristiky presnosti prístroja Trimble 3602 DR (obr. 3). Prvé experimentálne meranie bolo realizované v lokalite Hlohovec na geodetickej základnici za slnečného počasia. Na základnici boli merané dĺžky vo všetkých kombináciách spomenutým prístrojom medzi piliermi č. 1 až 5, ktoré sú osadené na trávnej ploche pravej časti brehu rieky Váh. Počas merania boli merané meteorologické prvky potrebné na fyzikálne redukcie meraných dĺžok vstupujúcich do výpočtu variančných komponentov charakterizujúcich presnosť použitého prístroja.

Následne na druhý deň bolo vykonané druhé experimentálne meranie v lokalite vodného diela Gabčíkovo (obr. 1), ktorého cieľom bolo hlavne overiť pravdivosť odhadnutých variančných koeficientov na základnici. Meranie sa uskutočnilo za polooblačného počasia v spomenutej geodetickej sieti (obr. 2) v predošlej kapitole. Keďže podmienky pri meraní na základnici v Hlohovci a v geodetickej sieti v lokalite Gabčíkovo boli odlišné, tak bolo zaujímavé ako sa budú zhodovať výsledné odhady charakteristiky použitého prístroja Trimble 3602 DR, kde výrobca charakterizuje presnosť meranej dĺžky $m_d = 2\text{mm} + 2\text{ppm}$.

Spracovaním výsledkov podľa popísaných teoretických modelov v predošlých kapitolách sme z oboch experimentálnych meraní získali odhadnuté variančné komponenty, ktoré sme zostavili do tab. 5.

Tab. 5. Odhadnuté variančné komponenty
Tab. 5. Estimate of the variance components

Prístroj	Zeiss Trimble 3602 DR, v. č.: 502 900		
Presnosť dĺžkového merania	Udaná výrobcom	Testovanie na základnici	Odhad v geodetickej sieti
	2mm + 2 ppm	$\hat{\mathcal{G}} = 0,1 \text{ mm} - 0,2 \text{ ppm}$	$\hat{\mathcal{G}} = 0,3 \text{ mm} + 1,2 \text{ ppm}$
presnosť odhadu	-	$\text{var}(\hat{\mathcal{G}}) = \begin{pmatrix} 0,04 & -0,05 \\ -0,05 & 0,10 \end{pmatrix} [\text{mm}^2]$	$\text{var}(\hat{\mathcal{G}}) = \begin{pmatrix} 0,11 & -0,18 \\ -0,18 & 0,33 \end{pmatrix} [\text{mm}^2]$

Následne bol realizovaný odhad parametrov prvého a druhého rádu v geodetickej sieti, kde boli do vstupnej kovariančnej matice odhadu použité odhadnuté variančné komponenty zo základnice a následne z odhadu v geodetickej sieti. Výsledky sú zostavené v nasledujúcej tab. 6.

Ako je vidieť z tab. 6, tak rozdiely v odhade parametrov prvého rádu (súradnice bodov) sú zanedbateľné, ale rozdiely sa výrazne prejavili v parametroch druhého rádu (výsledná kovariančná matica, z ktorej sú v tabuľke uvedené príslušné štandardné odchýlky).

Ďalším experimentom, realizovaným v geodetickej sieti Gabčíkovo bola simulácia posunu na bode č. 6. Na tomto bode bolo nainštalované posuvné zariadenie (obr. č. 4), ktoré nám zabezpečovalo posun v smere osi X aj Y s presnosťou na desatinu milimetra. Na základe známych približných súradníc bodov siete

bolo posuvné zariadenie priamo natočené rovnobežne so smerom osi X, a tým bol zároveň zabezpečený aj smer osi Y. Metódou optimálneho návrhu experimentu bola odhadnutá výsledná presnosť na bode č. 6. Hodnota posunu v smere osi +X bola simulovaná o hodnotu 6 mm, čo predstavovalo približne 3-násobok strednej chyby súradnice X na bode 6 a hodnota posunu v smere osi +Y bola simulovaná v rámci strednej chyby súradnice Y na bode 6, čo predstavuje hodnotu 2 mm. Následne na to bola opäť zameraná celá sieť. Do výpočtu parametrov prvého a druhého rádu bol potom opäť zadán vstupný parameter kovariančnej matice určený na základnici v Hlohovci a vstupné parametre kovariančnej matice odhadnuté priamo z merania v geodetickej sieti. Odhadnuté parametre geodetickej siete prvého a druhého rádu z merania pred simulovaním posunu a po simulovaní posunu na bode 6 boli porovnané a zostavené do tab. 7 a 8, kde bola vypočítaná aj pravdepodobnosť stability, resp. nestability bodov podľa invariantov dĺžok s využitím Fischer - Snedeckeho testu $F(1, f, \alpha)$.

Tab. 6. Odhadnuté súradnice bodov a ich charakteristiky
Tab. 6. Estimates of coordinates and their precision

BOD		$\bar{g} = 0,3 \text{ mm} + 1,2 \text{ ppm}$		$\bar{g} = 0,1 \text{ mm} - 0,2 \text{ ppm}$		Rozdiel
		Súradnice [m]	$\sigma(\cdot)$ [mm]	Súradnice [m]	$\sigma(\cdot)$ [mm]	Súradnice [mm]
1	X	1000,0000	0,0	1000,0000	0,0	0,0
	Y	1000,0000	0,0	1000,0000	0,0	0,0
2	X	1329,0679	0,4	1329,0679	1,1	0,0
	Y	1005,9177	1,1	1005,9176	2,5	-0,1
3	X	1529,2934	0,5	1529,2927	0,2	-0,7
	Y	1000,0000	0,0	1000,0000	0,0	0,0
4	X	1189,5451	1,8	1189,5452	4,5	0,1
	Y	1811,4230	0,8	1811,4231	1,9	0,1
5	X	1678,2073	1,7	1678,2075	4,3	0,2
	Y	1780,6300	1,1	1780,6299	2,3	-0,1
6	X	1946,3692	1,5	1946,3692	3,8	0,0
	Y	1645,3031	1,5	1645,3028	3,2	-0,3



Obr. 3. Prístroj Trimble 3602 DR
Fig. 3. Instrument Trimble 3602 DR



Obr. 4. Prenosné meracie zariadenie
Fig. 4. Portable equipment

Tab. 7. Odhadnuté súradnice bodov a ich charakteristiky -vstup \mathcal{G} z odhadu v sietiTab. 7. Estimated point coordinates and their precision -input \mathcal{G} from the network estimate

BOD	Pred simuláciou bodu 6			Simulovaný bod 6		Posun		Pravdepodobnosť posunu [%]
		Súradnice [m]	$\sigma(\cdot)$ [mm]	Súradnice [m]	$\sigma(\cdot)$ [mm]	Súradnice [mm]	$\sigma(\cdot)$ [mm]	
1	X	1000,0000	0,0	1000,0000	0,0	0,0	0,0	0
	Y	1000,0000	0,0	1000,0000	0,0	0,0	0,0	0
2	X	1329,0679	0,4	1329,0678	0,4	-0,1	0,6	14
	Y	1005,9177	1,1	1005,9178	0,9	0,1	1,5	6
3	X	1529,2934	0,5	1529,2933	0,4	-0,1	0,6	13
	Y	1000,0000	0,0	1000,0000	0,0	0,0	0,0	0
4	X	1189,5451	1,8	1189,5443	1,5	-0,8	2,3	27
	Y	1811,4230	0,8	1811,4231	0,7	0,1	1,0	8
5	X	1678,2073	1,7	1678,2069	1,5	-0,4	2,3	14
	Y	1780,6300	1,1	1780,6299	0,9	-0,1	1,4	6
6	X	1946,3692	1,5	1946,3743	1,3	5,1	1,9	99
	Y	1645,3031	1,5	1645,3040	1,3	0,9	1,9	36

Tab. 8. Odhadnuté súradnice bodov a ich charakteristiky - vstup \mathcal{G} z odhadu na základniciTab. 8. Estimated point coordinates and their precision -input \mathcal{G} from baseline estimate

BOD	Pred simuláciou bodu 6			Simulovaný bod 6		Posun		Pravdepodobnosť posunu [%]
		Súradnice [m]	$\sigma(\cdot)$ [mm]	Súradnice [m]	$\sigma(\cdot)$ [mm]	Súradnice [mm]	$\sigma(\cdot)$ [mm]	
1	X	1000,0000	0,0	1000,0000	0,0	0,0	0,0	0
	Y	1000,0000	0,0	1000,0000	0,0	0,0	0,0	0
2	X	1329,0679	1,1	1329,0679	1,1	0,0	1,5	0
	Y	1005,9176	2,5	1005,9179	2,4	0,3	3,5	7
3	X	1529,2927	0,2	1529,2927	0,2	0,0	0,3	0
	Y	1000,0000	0,0	1000,0000	0,0	0,0	0,0	0
4	X	1189,5452	4,5	1189,5445	4,4	-0,7	6,2	9
	Y	1811,4231	1,9	1811,4232	1,9	0,1	2,6	3
5	X	1678,2075	4,3	1678,2068	4,3	-0,7	6,1	9
	Y	1780,6299	2,3	1780,6297	2,3	-0,2	3,2	5
6	X	1946,3692	3,8	1946,3744	3,7	5,2	5,3	66
	Y	1645,3028	3,2	1645,3039	3,2	1,1	4,5	19

Záver

Z výpočtov a výsledkov, ktoré sú uvedené v tabuľkách, vyplýva mnoho dôvodov pre čo najlepšiu znalosť variančných komponentov, resp. charakteristík presnosti použitých prístrojov. Presnosť týchto vstupných charakteristík, ktoré vstupujú do výpočtu sa odzrkadľuje aj vo výsledných prvkoch odhadnutej kovariančnej matice. Každý experiment musí byť realizovaný so snahou získať čo najkvalitnejšie – najpresnejšie výsledky. To znamená, že okrem starostlivej metodiky merania a vlastného merania, aj interpretácia výsledkov musí obsahovať čo najmenšiu mieru neistoty. Nedokonalá znalosť výslednej kovariančnej matice, ktorá je východiskom na konštrukciu konfidenčných oblastí, prahových oblastí a testovanie hypotéz, môže viesť k nesprávnym rozhodnutiam a interpretáciám výsledkov, čo v konečnom dôsledku znehodnocuje prácu nielen observátora, ale spôsobuje následné škody používaním nesprávnych výsledkov v praktických aplikáciách.

Jednou z možností, ako sa čo najviac priblížiť k skutočným hodnotám, je tu prezentovaná metóda odhadu variančných komponentov z meraní v geodetickej sieti. Oproti testovaniu prístroja na základnici je výhodou tejto

metódy najmä odhad presnosti použitých prístrojov z meraní získaných priamo v geodetickej sieti za podmienok experimentu, čo je pre observátora aj ekonomicky menej náročné a samotný odhad je realizovaný z väčšieho počtu nadbytočných meraní.

Článok tvorí súčasť riešenia grantovej úlohy evid. č.: 1/1153/04.

Literatúra - References

- Kubáček, L., Kubáčková, L.: Statistika a metrologie. Olomouc, Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci, 2000.
- Rao, C. R.: Lineární metody statistické indukce a jejich aplikace. Praha, Academia, 1978.